

粒状多孔質体に対する新たな屈曲度推定モデル

A novel tortuosity prediction model of porous granular materials

● 内海 秀幸

建築都市環境学科 教授

● Hideyuki UTSUMI

Dept. of Architecture and Civil Engineering, Professor

● 2013年9月20日受付

● Received : 20 September 2013

A novel tortuosity prediction model for fine sands using a simplified permeation experiment similar to the falling head permeability test is proposed. This model is based on the author's previous tortuosity prediction model using thermogravimetry under a non-isothermal condition. It is formulated from the relative relationship between saturated sands and free water the amount of water level fluctuation. Tortuosity was estimated to range from 1.5 to 2.4 when Toyoura sand was assumed. The formation factor calculated using the tortuosity conforms to Archie's law.

キーワード : Tortuosity, Sandy soil, Falling head permeability test, Archie's law

1. はじめに

幾何学的な概念に基づいた場合、粒状多孔質体の屈曲度 τ は次式のように定義される (図1参照)¹⁾²⁾³⁾.

$$\tau = \frac{L_e}{L} = 1 + \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

ここで、 L は粒状多孔質体の層厚、 L_e は間隙構造に基づく実質的経路長、 ΔL は実質的経路長 L_e と層厚 L の差であり次式のように表わされる (図1参照).

$$\Delta L = L_e - L \quad (2)$$

粒状の物質により形成される多孔質体の拡散係数や透水係数、透気係数と屈曲度には密接な相関があり、屈曲度の簡便かつ定量的な推定方法の確立は、多孔質体内部における各種の物質移動問題に取り組むための共通基盤的な基礎研究と言えよう。

さて、式(1)における幾何学的な定義は屈曲度に対して明確なイメージを与えるものであり、間隙構造に対して所定の経路を仮定することにより、その値を求めるための数理モデルを構築することが可能となる。しかしながら、実際の複雑かつ緻密な間隙構造を有する多孔質体の構造と

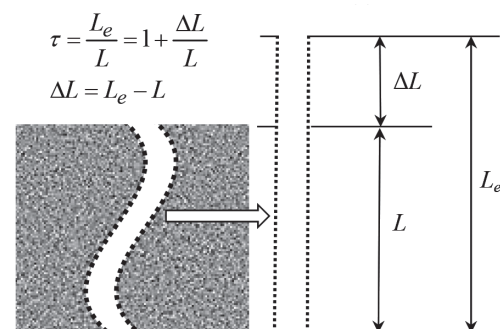


図1 幾何学的な屈曲度の定義

は根本的に乖離した概念であることから、実験に基づく屈曲度推定のための基礎式として、式 (1) の形式を直接利用することは一般には困難であると指摘されている⁴⁾。

一方、地盤やコンクリート、さらには電極等の各種多孔質体の屈曲度推定を目的とした研究では、次式のように不活性ガスの拡散係数の相対的關係に基づいて表現される形式を用いる場合が多い⁵⁾⁶⁾⁷⁾。

$$\frac{D_{ef}}{D_0} = \frac{\Phi}{\tau^2} \quad (3)$$

ここで、 Φ は間隙率、 D_{ef} は不活性ガスの多孔質体内部における有効拡散係数、 D_0 は不活性ガスの大気中での拡散係数である。式 (3) における屈曲度 τ も式 (1) に基づいた定義が採用されているが、その導出にあたっては電気比抵抗に基づくフォーメーション・ファクターに関する概念⁸⁾ が導入されていることから、いわば屈曲度に対する物理的な定義と言えらるであろう (式 (3) の導出過程の詳細は本論の 2.2 節に記載)。

式 (3) は屈曲度が間隙率の関数として表現できることを示唆しており、この物理的な屈曲度の定義に基づいて、間隙率を関数とした形式の屈曲度推定式が既往の研究で多数提案されている⁹⁾。

また、間隙構造をモデル化した多孔質体の有効拡散係数を数値シミュレーションにより評価し、式 (3) を利用して屈曲度を評価する逆解析的な手法¹⁰⁾ も提案されており、式 (3) は屈曲度を評価する取り組みにおいて汎用性が高いと言えよう。

しかしながら、式 (3) についても、実験に基づいた屈曲度推定のための基礎式として直接利用することについては、通常、多孔質体の有効拡散係数を評価するには専用の試験機が必要であり、また、その運用には手間もかかることから合理的とはいえない。

式 (3) 以外に屈曲度と他の物理パラメータとの相関が明確となっている数理表現式の代表として Kozeny-Carman の式¹¹⁾¹²⁾¹³⁾ が挙げられる。Kozeny-Carman の式は均質な砂質地盤のような粒子集合体の多孔質体に対して適用される式であり、ダルシー則に含まれる導水勾配に流体が通過する間隙構造の実質的な経路長 (式 (1) における L_e に相当する) を導入し、かつ、間隙径に水理半径 (Hydraulic Radius) の概念を導入することにより、屈曲度を含んだ次式の形式で透水係数 k_T が表現されている。

$$k_T = \frac{\rho_w g}{\eta_w} \frac{\lambda^2}{8} \left(\frac{L}{L_e} \right)^2 \frac{\Phi^3}{\rho_s^2 (1-\Phi)^2 S^2} = \frac{\rho_w g}{\eta_w} \frac{\lambda^2}{8} \left(\frac{1}{\tau} \right)^2 \frac{\Phi^3}{\rho_s^2 (1-\Phi)^2 S^2} \quad (4)$$

ここで、 S は対象とする多孔質体の単位質量あたりの比表面積 [cm^2/g]、 g は重力加速度 ($980.6[\text{cm}/\text{s}^2]$)、 η_w は流体の粘性係数 [$\text{g}/(\text{cm} \cdot \text{s})$]、 ρ_s ならびに ρ_w はそれぞれ多孔質体を構成する骨格部分ならびに間隙中を移動する流体の密度 [g/cm^3] であり、 λ は水理半径により定められる間隙径の幾何学形状を定める無次元定数である。

Kozeny-Carman の式の特徴は、屈曲度以外に間隙構造の特性を反映した微視的構造を表現するパラメータを 3 つ (間隙率 Φ 、比表面積 S 、幾何学形状を定める定数 λ) を含んでいる点であり、透水性に寄与するそれらパラメータの相互関係を検討する上で優れている。しかしながら、この Kozeny-Carman の式において、間隙径の幾何学形状を定める定数 λ については本質的に未知であり、そもそも、Carman 自身の取り組みにおいても屈曲度 τ と λ を含んだ定数 C を

$$\frac{1}{C} = \frac{\lambda^2}{8} \cdot \left(\frac{L}{L_e} \right)^2 = \frac{\lambda^2}{8} \cdot \left(\frac{1}{\tau} \right)^2 \quad (5)$$

のように定義し、定数 C に関してはあらかじめ所定の値を与えた上で実測した透水係数ならびに間隙率より比表面積を推定するために式 (4) を利用している¹⁴⁾。そのため、実測可能な透水係数と屈曲度との相関が数理表現としては明確になっているものの、この Kozeny-Carman の式についても、実験に基づいた屈曲度推定式としての直接の利用には不足がある。

以上のように、屈曲度の概念については幾何学的、物理学的、双方の観点から基本的には明確になっており、その推定に関しては、数値シミュレーションを利用した方法や間隙率を関数とした推定式も多数存在しているものの、簡便さと合理的な理論の双方を兼ね備えた実験に基づく屈曲度推定のための方法については、残念ながら今日においても確立されていない。

そこで本研究は、細砂レベルの球形粒子の集合により構成された多孔質体を対象として、実験的に屈曲度を簡便かつ直接推定することが可能な屈曲度推定式を新たに構築することを目的としたものである。

本研究で提案する屈曲度推定式は、著者自身が既往の研究で構築した非等温熱重量を利用した屈曲度推定法¹⁵⁾ に着想を得たものであり、変水位透水試験に用いる機器と類似した排水機能を有する円筒容器を利用し、飽和した状態の多孔質体における水の水位変化量と水のみの場合での水位変化量との相対的關係を利用して定式化され、実験に必要な機器は極めて簡素であるとともに実験の実施も極めて容易なものとなっている。

2. 屈曲度に関する既往の研究のレビュー

2.1 屈曲度の基本的な数理特性

多孔質体の間隙構造は一般に $L < L_e$ (図 1 参照) となることから、Boudreau¹⁶⁾ は屈曲度 τ の数理的な基本特性は次式を満たすべきものであると指摘している。

$$\tau^2 \geq 1 \quad (6)$$

$$\lim_{\Phi \rightarrow 1} \tau = 1 \quad (7)$$

なお、Boudreau が指摘した式 (6) と式 (7) は、前提として、多孔質体はその見かけの体積に比較して十分小さ

い粒子の集合体として形成されているものとした解釈に基づいている。

2.2 屈曲度に対する物理的な定義(式(3))の導出

今日、式(3)については屈曲度に関する「定義」としての取り扱いが一般化しているが、その導出過程の詳細について明記されている文献が著者の知る限り存在しないことから、その導出過程を以下に記載することとしたい。まず、電気比抵抗の計測結果より得られるフォーメーション・ファクター F は次式のように定義される⁸⁾。

$$F = \frac{\Psi_{sw}}{\Psi_w} \quad (8)$$

ここで、 Ψ_{sw} は飽和状態での多孔質体の電気比抵抗、 Ψ_w はその多孔質体の間隙構造内溶液の電気比抵抗である。

図2に示すように、多孔質体に単一かつ直線的に傾斜した間隙経路を仮定し、かつ、骨格部分を非伝導体と仮定すると、電気比抵抗と図2に示す幾何学条件について次式の関係が成立する¹⁷⁾。

$$\Psi_{sw} \frac{L}{A} = \Psi_w \frac{L_e}{A_e} \quad (9)$$

ここで、 A は多孔質体の断面積、 A_e は間隙経路の断面積である。図2に示す幾何学条件より、 $A_e/A_l = L/L_e$ (A_l :多孔質体主面に対する間隙経路の断面積)、また、間隙率については $\Phi = A_l/A$ と記述できることから、式(9)は次式のように表現できる。

$$F = \frac{\Psi_{sw}}{\Psi_w} = \frac{L_e/L}{A_l/A} = \frac{L_e/L}{(A_l/A)(L/L_e)} = \frac{(L_e/L)^2}{(A_l/A)} = \frac{\tau^2}{\Phi} \quad (10)$$

ここで、 σ_{sw} を飽和状態での多孔質体の電気伝導度、 σ_w を多孔質体の間隙構造内溶液の電気伝導度とすると、 σ_{sw}/σ_w とフォーメーション・ファクター F は反比例することから次式の関係が成立する。

$$\frac{1}{F} = \frac{\Psi_w}{\Psi_{sw}} = \frac{\sigma_w}{\sigma_{sw}} \quad (11)$$

また、電気伝導度と拡散係数の関係についてはネルンスト-アインシュタインの関係に基づいて

$$\frac{\sigma_{sw}}{\sigma_w} = \frac{D_{ef}}{D_0} \quad (12)$$

が成立するものとする、式(10)に式(11)、式(12)を考慮することにより、式(3)で表現される屈曲度に関する物理的な定義を得ることができる。

$$\frac{D_{ef}}{D_0} = \frac{\Phi}{\tau^2} \quad \text{式(3)を再提示}$$

2.3 定数として表現される屈曲度の値

Johnson and Stewart¹⁸⁾は式(1)で定義される幾何学的な概念に立脚し、次式のように積分表現により屈曲度の値を具体的な定数として表現している。

$$\frac{1}{\tau^2} = \int_0^\pi \cos^2 \omega \cdot \frac{\sin \omega}{2} d\omega = \frac{1}{3} \quad (13)$$

(Johnson and Stewart Model)

ここで、式(13)はJohnson and Stewartのモデルを一般化したFriedman and Seaton¹⁹⁾の表現に基づいており、 $\tau = 3^{0.5} \approx 1.732$ と表現されている。

式(13)中における $\cos^2 \omega$ と $\sin \omega / 2$ (ω :経路の勾配)はそれぞれ多孔質体の間隙経路の勾配と経路内での物質移動に関する確率関数を意味しており、経路の勾配と経路内での拡散に対する可能性を考慮したうえで屈曲度が評価されている。なお、Kozeny-Carmanの式で定数として用いられる屈曲度の値は一般に $\tau = 2^{0.5} \approx 1.414$ である^{13), 14)}。

2.4 間隙率を関数とした屈曲度推定式

間隙率を関数とした形式で表現される屈曲度推定式は数多く存在し、多数の推定式が文献9)で紹介されている。それらのうち、式(3)を基礎とする代表的な屈曲度推定式を以下に示す。

$$\tau = \sqrt{\Phi^{-1/3}} \quad (\text{Millington}) \quad (14)$$

$$\tau = \sqrt{1 - 0.5 \ln \Phi} \quad (\text{Weissberg}) \quad (15)$$

Millingtonのモデル²⁰⁾は式(3)に基づいて屈曲度が間隙率のべき乗則に準ずることを前提としており、また、Weissbergのモデル²¹⁾では式(3)の拡散係数比に対して間隙構造に対する仮定と対応した試験関数を利用することにより導かれている。これら、MillingtonとWeissbergの式はともに多孔質体の間隙構造を球形の粒状体により形成されているものと仮定して導かれているが、その汎用性は高く、Boudreau¹⁶⁾はWeissbergの式を地盤を対象とした実測結果に基づいて拡張し、次式の様な屈曲度推定式を提案している。

$$\tau = \sqrt{1 - \ln \Phi^2} \quad (\text{Boudreau}) \quad (16)$$

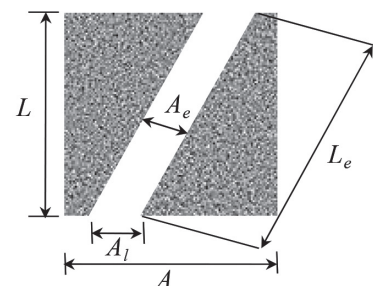


図2 フォーメーション・ファクターと屈曲度の関係

また, Koponen *et al.*²⁾ はセルオートマトンを基礎とした 2次元格子ボルツマン法を用いた数値計算結果の経験則として, 次式の様な屈曲度推定式を提案している.

$$\tau = 1 + 0.8(1 - \Phi) \quad (\text{Koponen } et \text{ al.}) \quad (17)$$

Koponen らの取り組みは, 複雑系に対する解析手法を多孔質体の屈曲度推定に応用したものであり, 1章で示した文献 10) による取り組みも, 基本的には Koponen らのアプローチと同等なものといえよう. なお, 近年における最も新しい研究成果としては, Ahmadi *et al.*²²⁾ により, Kozeny-Carman の式を基礎とした次式のような屈曲度推定式が提案されている.

$$\tau = \sqrt{\frac{2\Phi}{3[1 - B(1 - \Phi)^{2/3}] + 1}} \quad (\text{Ahmadi } et \text{ al.}) \quad (18)$$

ここで, B は定数であり, 間隙構造のネットワークに 3次元の立体交差モデルを想定した場合は $B=1.209$, 四面体構造モデルを想定した場合は $B=1.108$ となる. この Ahmadi *et al.* の式の特徴は間隙構造を体積要素 (REV) の観点からモデル化することにより, Kozeny-Carman の式に含まれる定数 λ をキャンセルした形式で屈曲度推定式を解析的に導出している点である.

上記のような, 間隙率を関数とした屈曲度推定式は, 図 3 に示すように, 間隙率の低下に対して屈曲度は増加する傾向を示すものとなる.

3. 解析モデルの設定

図 4 に本研究で提案する屈曲度推定式を定式化するための解析モデルを示す. 実験モデルは変水位透水試験に用いられる機器と類似した構成となっており, 底部に水室が設けられた一様断面の容器を想定している. また, 容器本体の側部には排水時の水位を一定に保つため, 水をオーバーフローさせる容器が付設されている.

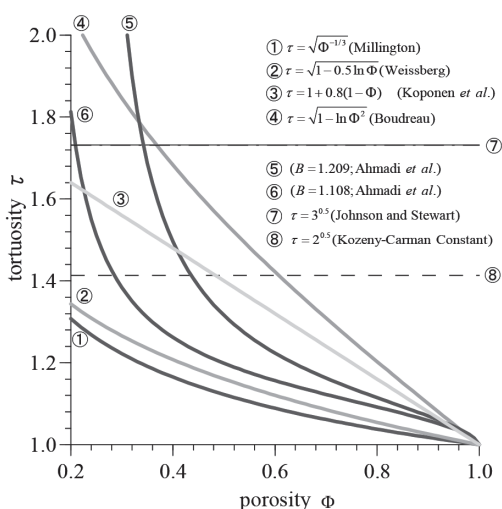


図3 間隙率と屈曲度の関係

本研究で提案する屈曲度推定式は, 図 4 に示す Type I の実験 (容器に粒状体を設置した場合), Type II の実験 (容器に水のみを充填した場合), それぞれの実験より得られる排水時間 Δt と水位変化量 ($L_{sw}(\Delta t)$ と $L_w(\Delta t)$) の相対的關係を利用して定式化される.

このような物質移動の相対關係から屈曲度を推定する手法は, 著者自身が既往の研究で構築した非等温熱重量を利用した屈曲度推定の方法¹⁵⁾ に着想を得たものであるが, 著者の成果 (文献 15)) が公表された同年に Vallabh *et al.*²³⁾ も類似したコンセプトに基づいた屈曲度推定法を提案している. Vallabh *et al.*²³⁾ の取り組みでは, 繊維多孔質体の屈曲度を実験的に推定する上で, 試料の層厚を各種変化させた場合での透気係数の相対的關係を利用してゐる. いわば, 単一の実験ではなく, 複数の条件下での物質移動の相対的關係から屈曲度を把握しようとするコンセプトは屈曲度の実験的推定法に関しては有効なアプローチであるといえよう.

さて, 図 4 における L は多孔質体の層厚を意味し, Δt は $\Delta t = t_2 - t_1$ ($t_2 > t_1$) として定義される排水時間である. Level A は $t_1 = 0$ とした初期状態での水位であり, 容器に粒状体が設置された場合での実験 (Type I) と水のみが充填された場合での実験 (Type II) とともに同等な水頭 h_0 と設定している.

さらに, Level B は水頭 h_2 (t_2) により規定される Type I の実験における水位である. また, Level C は Level B と同時刻 t_2 における水位であるが, Type II の実験における水位であり, 水頭 h_3 (t_2) より規定される.

したがって, 図 4 における水位変化量を意味する $L_{sw}(\Delta t)$, $L_w(\Delta t)$ はそれぞれ次式により表わされる.

$$\begin{cases} L_w(\Delta t) = h_0 - h_3(t_2) \\ L_{sw}(\Delta t) = h_0 - h_2(t_2) \end{cases} \quad (19)$$

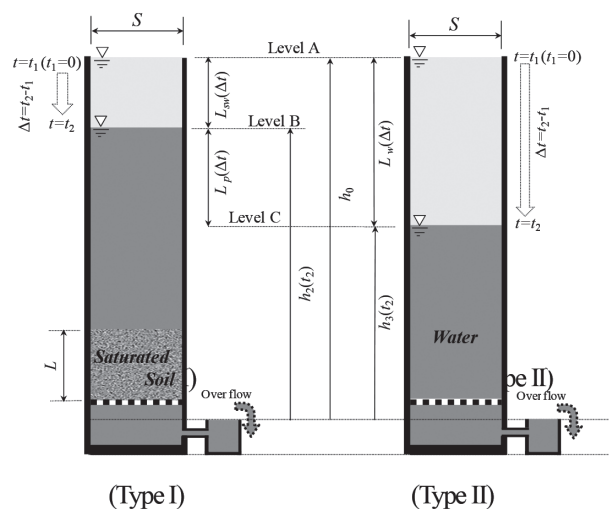


図4 屈曲度推定式を定式化するための実験モデル

図4の実験モデルは変水位透水試験機と同等な機構を有していることから、排水時間と水位変化量の関係は変水位透水試験より透水係数を求めるための次式により表現することができる。

$$L_{sw}(\Delta t) = h_0 \left(1 - \frac{1}{\exp[Q_{sw}\Delta t]} \right) \quad (\text{Type I}) \quad (20)$$

$$L_w(\Delta t) = h_0 \left(1 - \frac{1}{\exp[Q_w\Delta t]} \right) \quad (\text{Type II}) \quad (21)$$

ここで、式(21)の Q_w は実験装置固有の水に対する透過性を表現する定数[1/s]である。また、本研究において Q_{sw} [1/s]は次式のように定義する。

$$Q_{sw} = \Omega \cdot \frac{k_T}{L} \quad (22)$$

ここで、 Ω は無次元定数[-]、 k_T は透水係数[cm/s]である。 Ω は通常の変水位透水試験より透水係数を求めるための基礎式では水位変化を読み取るためのスタンドパイプ断面積と多孔質体の断面積の比に相当するが、本研究では、Type Iの実験における水位変化量 $L_{sw}(\Delta t)$ [cm]から透水係数 k_T [cm/s]を評価するための校正係数と位置付けられる。これら Q_w と Ω はともに実験装置固有の校正係数(定数)であり、本研究で提案する屈曲度推定式を定式化する上で予め把握しておく必要があることから、次章にその決定方法と得られた値の結果について述べる。

4. 実験装置のキャリブレーション (Q_w と Ω の決定)

4.1 実験装置

本研究で用いる実験装置を写真1に示す。実験装置は図4に示した解析モデルに対応するよう著者が考案・製作したものである。本体ならびに側部に敷設された水をオーバーフローさせるための容器は、ともに内径10[cm] (断面積78.54[cm²])、肉厚0.8[cm]の亚克力性ケーシングを加工して作製されている。

粒状体を設置する容器の下部には水室が設けられており、その水室部分に開閉が容易なステンレス製コックが取り付け



写真1 実験装置 (亚克力性ケーシングを加工して作製) 豊浦標準砂を設置した場合

けられている。

水室とその上部(粒状体を設置する部分)は孔を多数あけた亚克力板により隔てられており、その亚克力板の上には45[μ m]のメッシュが張られている。本実験装置におけるLevel Aに相当する水頭 h_0 は $h_0=30.3$ [cm]となる(図4参照)。

4.2 キャリブレーション (Q_w と Ω の決定法)

Q_w はType IIの実験より得られる排水時間 Δt と水位変化量 $L_w(\Delta t)$ の実測結果に式(21)を回帰式とした最小二乗法を適用することにより決定することができる。

一方、 Ω についても、予め透水係数 k_T が既知であればType Iの実験を実施し、それにより得られる排水時間 Δt と水位変化量 $L_{sw}(\Delta t)$ の実測結果に式(20)を回帰式とした最小二乗法を適用することにより決定できる。本研究では、 Ω を決定する上でガラスビーズを用いたモデル実験を実施し、透水係数については次式の宇野ら²⁴⁾により提案された式を用いることとする。

$$k_T[\text{cm/s}] = 12.3 \frac{\rho_w}{\eta_w} \Phi \left(\frac{4\Phi}{S_v(1-\Phi)} \right)^2 \quad (23)$$

$$S_v \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}^3} \right] = \frac{6}{d[\text{cm}]}$$

ここで、 d は多孔質体を構成する粒子の平均粒径[cm]、 S_v は粒子の単位体積あたりの表面積[cm²/cm³]である。宇野らのモデル(式(23))はガラスビーズを用いた均一粒径のモデルはもとより、幅広い粒径に対して適用可能であり、豊浦標準砂の場合では $d=0.016$ [cm]、代表的な粘性土であるシルトに対しては $d=5 \times 10^{-4}$ [cm]程度の値を利用すれば定水位透水試験の実験結果と良好な一致を示す。なお、実験における水の温度は 23 ± 1 [$^{\circ}$ C]の範囲で行い、式(23)における、水の密度 ρ_w [g/cm³]と粘性係数 η_w [g/(cm s)]は文献²⁵⁾に基づき次式により決定することとした。

$$\rho_w = [1 - \exp(a_1 T^2 + b_1 T + c_1)] \quad (24)$$

$$\eta_w = \frac{a_2}{b_2 T^2 + c_2 T + 1} \times 10$$

ここで、 T は水温[$^{\circ}$ C]であり、式(24)中に含まれる各係数はそれぞれ、 $a_1=0.00121$ 、 $b_1=-0.00968$ 、 $c_1=-8.671$ 、 $a_2=1.83 \times 10^{-3}$ 、 $b_2=1.85 \times 10^{-4}$ 、 $c_2=0.036$ である。

4.3 Q_w の決定 ($Q_w=2.122 \times 10^{-2}$ [1/s])

Q_w は4.2節で述べたように、図4のType IIでの実験を実施し、排水時間 Δt と水位変化量 $L_w(\Delta t)$ の実測結果に対して、式(21)を回帰式とした最小二乗法により決定する。

実験では5[s]ごとにステンレスコック開閉し、5[s]～30[s]まで計6つの各排水時間 Δt での水位変化量 $L_{sw}(\Delta t)$ 、 $L_w(\Delta t)$ を計測することとした。

実験より得られた排水時間 Δt と水位変化量 $L_w(\Delta t)$ の関係を図5に示した。図5中の□は水位変化量 $L_w(\Delta t)$ の実測結果であり、○はその実測結果に対して式(21)を回帰式とした最小二乗法の結果に基づいてプロットされたものである。図5より、最小二乗法を適用した際の偏差の二乗平均 (R^2) はすべて0.99以上の値となり、式(21)により Type II における排水時間と水位変化量の関係が良好に表現できていることが確認できる。計4回実施した実験より評価された Q_w の平均値は $Q_w = 2.122 \times 10^{-2} [1/s]$ となった。

4.4 無次元量 Ω の決定 ($\Omega = 0.824 [-]$)

Ω についても4.2節で述べたように、Type I の実験を実施し、排水時間 Δt が5[s] ~ 30[s] において水位変化量 $L_{sw}(\Delta t)$ 実測結果に対して、式(20)を回帰式とした最小二乗法を適用することにより決定する。

なお、 Ω の決定は、ガラスビーズを用いたモデルにより行った。用いたガラスビーズの密度 ρ_s は $2.5 [g/cm^3]$ である。また、一般的な細砂の粒径は $0.0125 \sim 0.025 [cm]$ であることから、ガラスビーズの平均粒径 d はその範囲に含まれる $d = 0.021 [cm]$ を用いた。

さて、 Ω は多孔質体の間隙構造とは相関のない実験装置固有の校正係数(定数)であることから、 Ω が多孔質体の間隙構造に関わらず所定の値となることを確認する観点から、この Ω を決定するための実験ではガラスビーズ(モデル)の層厚 L を変化させた実験を実施した。この実験より得られた排水時間 Δt と水位変化量 $L_{sw}(\Delta t)$ の関係を図6に示す。

図6中の□は水位変化量 $L_{sw}(\Delta t)$ 実測結果であり、○はその実測結果に対して式(20)を回帰式とした最小二乗法の結果に基づいてプロットされたものである。図6より、最小二乗法を適用した際の偏差の二乗平均 (R^2) はすべて0.99以上の値となっており、式(20)により Type I における排水時間と水位変化量の関係が良好に表現できているものと言える。なお、図6に掲載した各層厚の実験をそれぞれ3回実施し、それらの結果においても、式(20)を回帰式と偏差の二乗平均 (R^2) がすべて0.99以上の値であった。全9回の実験結果に対する、変動係数は3.35%であり、一連の実験より評価された Ω の値の平均値は $\Omega = 0.824$ となった。

5. 屈曲度推定式の定式化

5.1 水位変化量の (L_{sw} , L_w) と k_T/L の関係

著者は式(20) ~ (22)に基づいて、透水係数 k_T 、層厚 L ならびに所定の時刻における水位変化量 $L_{sw}(\Delta t)$ 、 $L_w(\Delta t)$ に関する関係を調べた結果、図7に示すような特定の構成関係があることを見出した。

図7中のプロット○は、式(20) ~ (22)より計算した k_T/L と $(\exp[L_{sw}(\Delta t)/L_w(\Delta t)] - 1)$ の結果であ

り、この計算に際して Q_w ならびに Ω については4章で述べた実験に基づいて把握された $Q_w = 2.122 \times 10^{-2} [1/s]$ 、 $\Omega = 0.824$ を用いている。なお、図7のプロット○は層厚を $L = 10 [cm]$ と仮定し、かつ、一般的な砂質地盤の透水係数が概ね $0.001 \sim 0.1 [cm/s]$ であることを勘案し、 k_T/L が $0.0001 \sim 0.01 [1/s]$ の範囲での結果を示している。

図7における実線はプロット○に対して A と B を定数とした回帰式とした最小二乗法によるフィッティング結果であり、その偏差の自乗平均 R^2 は1.000となっている。

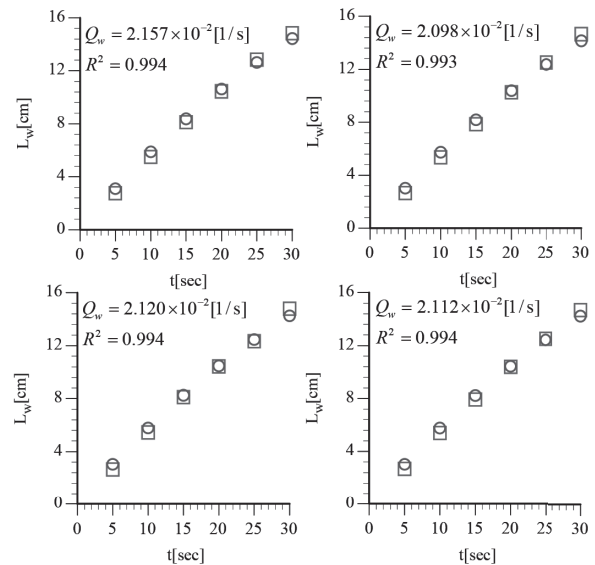


図5 Q_w の決定: Type II の実験における排水時間と水位変化量の関係 (□: 実測結果, ○: 式(21)を回帰式として最小二乗法によるフィッティング結果に基づいたプロット)

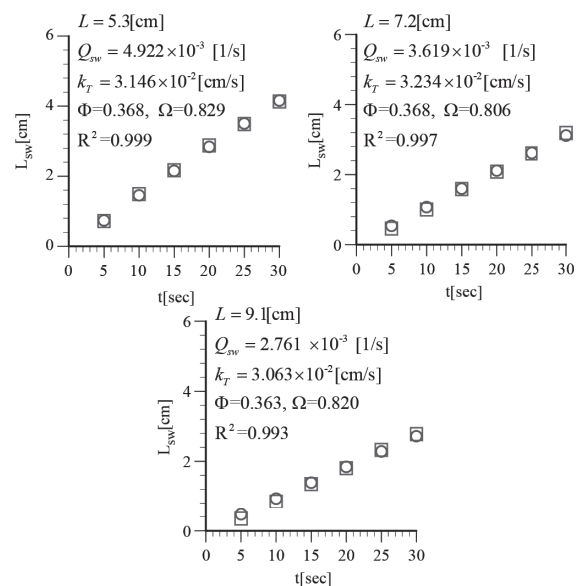


図6 Ω の決定: Type I の実験における排水時間と水位変化量の関係 (□: 実測結果, ○: 式(20)を回帰式として最小二乗法によるフィッティング結果に基づいたプロット)

すなわち、透水係数 k_T 、層厚 L ならびに所定の時刻における水位変化量 $L_{sw}(\Delta t)$ 、 $L_w(\Delta t)$ の各物理量の構成関係として $(\exp[L_{sw}(\Delta t)/L_w(\Delta t)]-1)$ が k_T/L を変数とした原点を通る二次関数により表現できることを著者は見出した。

$$\left(\exp \left[\frac{L_{sw}(\Delta t)}{L_w(\Delta t)} \right] - 1 \right) = A \left(\frac{k_T}{L} \right)^2 + B \left(\frac{k_T}{L} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 651.74[s^2], B = 52.742[s], \Delta t = 30[s] \\ 0.0001 < \frac{k_T}{L} < 0.01 \end{array} \right. \quad (25)$$

5.2 屈曲度推定式

本研究で提案する屈曲度推定式は式 (25) に基づいて定義化される。

まず、式 (25) を透水係数 k_T について解くと、 $k_T > 0$ の場合は次式のように表わされる。

$$k_T = \frac{-BL + L \sqrt{4A \exp \left[\frac{L_{sw}(\Delta t)}{L_w(\Delta t)} \right] - 4A + B^2}}{2A} \quad (26)$$

さて、式 (7) の条件が成立する場合、水位変化量の比である $L_{sw}(\Delta t)/L_w(\Delta t)$ は

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\tau \rightarrow 1.0} \frac{L_{sw}(\Delta t)}{L_w(\Delta t)} = 1.0 \\ \lim_{\Phi \rightarrow 1.0} \frac{L_{sw}(\Delta t)}{L_w(\Delta t)} = 1.0 \end{array} \right. \quad (27)$$

を充足する。ここで、式 (27) を満たす場合の透水係数を k_0 として次式のように定義する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\tau \rightarrow 1.0} k_T = k_0 \\ \lim_{\Phi \rightarrow 1.0} k_T = k_0 \end{array} \right. \quad (28)$$

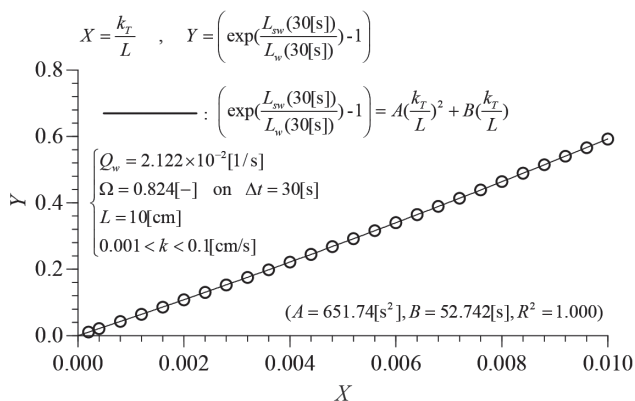


図7 k_T/L と $(\exp[L_{sw}(\Delta t)/L_w(\Delta t)]-1)$ の関係 ($A=651.74[s^2], B=52.742[s]$ on $\Delta t=30[s]$)

k_0 は式 (26) に式 (27), 式 (28) を考慮することにより、具体的に計算可能な表現として次式のように表わされる。

$$k_0 = \frac{-BL + L \sqrt{4A \exp[1.0] - 4A + B^2}}{2A} \quad (29)$$

式 (26) と式 (29) より、透水係数比 k_T/k_0 は次式のように表わされる。

$$\frac{k_T}{k_0} = \frac{-B + \sqrt{4A \exp \left[\frac{L_{sw}(\Delta t)}{L_w(\Delta t)} \right] - 4A + B^2}}{-B + \sqrt{4A \exp[1.0] - 4A + B^2}} \quad (30)$$

さて、式 (3) で示した拡散係数比 D_{ef}/D_0 と式 (30) で表現される透水係数比 k_T/k_0 は、多孔質体に対する物質の透過性に関する尺度としては類似しているものといえるであろう。

Khaled K. Al-Tarawneh *et al.*²⁶⁾ によれば、式 (29) と同様に、間隙率 Φ が 1.0 となる場合の透水係数を k_0 と定義した場合、式 (3) で示した拡散係数比 D_{ef}/D_0 と透水係数比 k_T/k_0 は等価な取り扱いが可能であることを示唆している。

そこで、本研究では、Khaled K. Al-Tarawneh *et al.*²⁶⁾ の研究に倣い、拡散係数比 D_{ef}/D_0 と透水係数比 k_T/k_0 の関係を次式のように等価であると仮定する。

$$\frac{k_T}{k_0} \propto \frac{D_{ef}}{D_0} \quad (31)$$

式 (30) に式 (31) と式 (3) を考慮することにより次式を得る。

$$\frac{\Phi}{\tau^2} = \frac{k_T}{k_0} = \frac{-B + \sqrt{4A \exp \left[\frac{L_{sw}(\Delta t)}{L_w(\Delta t)} \right] - 4A + B^2}}{-B + \sqrt{4A \exp[1.0] - 4A + B^2}} \quad (32)$$

式 (32) より、本研究で提案する屈曲度推定式を次式により定義する。

$$\tau = \sqrt{\frac{\Phi}{\frac{-B + \sqrt{4A \exp \left[\frac{L_{sw}(\Delta t)}{L_w(\Delta t)} \right] - 4A + B^2}}{-B + \sqrt{4A \exp[1.0] - 4A + B^2}}}} \quad (33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 651.74[s^2], B = 52.742[s], \Delta t = 30[s] \\ 0.0001 < \frac{k_T}{L} < 0.01 \end{array} \right.$$

図 8 に屈曲度推定式 (式 (33)) の定式化フローを示した。屈曲度推定式 (式 (33)) の特徴は、Type I と Type II の実験に対応した式 (20) と式 (21) の相関より見出された式 (25) を基礎としているところにある。また、式 (27) を満たす透水係数 k_0 を式 (29) のように実際に計算可能

な量として表現できていることから、拡散係数比 D_{ef}/D_0 と透水係数比 k_T/k_0 を等価であるとした式 (31) の仮定の導入を可能としている点にある。さらに、実際の運用に関しては、写真 1 に示すような簡便な実験機器により、水位変化量 $L_{sw}(\Delta t)$ 、 $L_w(\Delta t)$ ならびに粒状多孔質体の間隙率 Φ の 3 つの物理量を把握することにより屈曲度を計算できるようになっている点である。

なお、式 (33) に含まれる定数 A 、 B は、式 (20)、(21) における定数 Q_w と Ω に由来するものであることに留意されたい。実験に利用する機器 (写真 1 参照) ごとに定数 Q_w と Ω は異なるため、読者が本手法を再現する場合、用いる容器ごとに 4 章で説明したキャリブレーションによりそれらの定数をあらかじめ把握する必要がある。

6. 計算例に基づく提案モデルの検討

6.1 検討の方法

前節で述べたように、本研究で提案する屈曲度推定式 (式 (33)) は、水位変化量 $L_{sw}(\Delta t)$ 、 $L_w(\Delta t)$ ならびに間隙率 Φ の 3 つの物理量を実験的に把握することにより屈曲度が計算できるものとなっているが、本研究では、以下に述べる宇野らの提案する透水係数の推定式 (式 (23)) を利用した取り組みにより、屈曲度推定式 (式 (33)) の基本的な特性ならびに妥当性の検討を行うこととする。

宇野らの提案する式 (23) は、透水係数 k_T と間隙率 Φ の関係について、間隙率 Φ が 0.2 ~ 0.5 の範囲では次式の

ようなべき乗則により良好に表現することが出来る。

$$\begin{cases} \Phi \cong 1.029 k_T^{0.248} ; 0.016[\text{cm}] \\ \Phi \cong 0.899 k_T^{0.248} ; 0.021[\text{cm}] \end{cases} \quad (34)$$

式 (34) を利用して透水係数 k_T と間隙率 Φ の関係を決定し、それに、対応した水位変化量 $L_{sw}(\Delta t)$ 、 $L_w(\Delta t)$

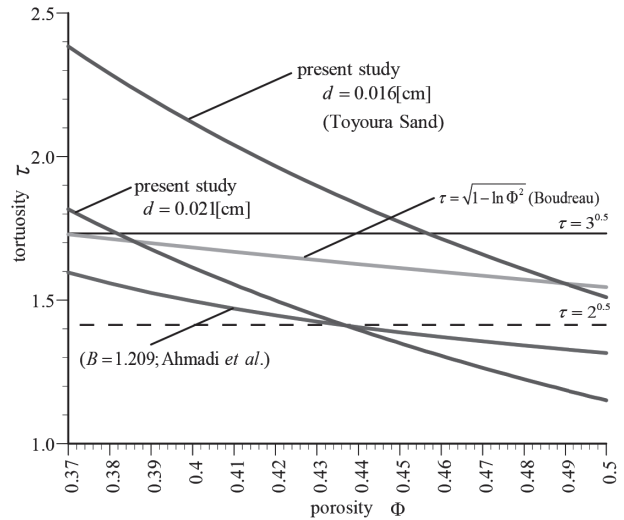


図9 間隙率と屈曲度の関係

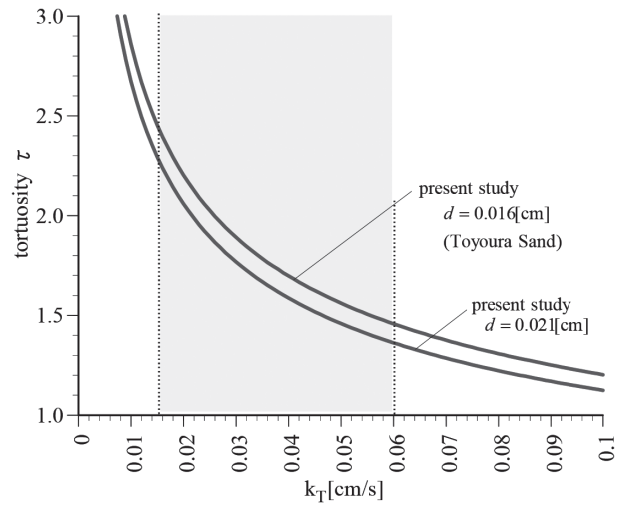


図10 透水係数と屈曲度の関係

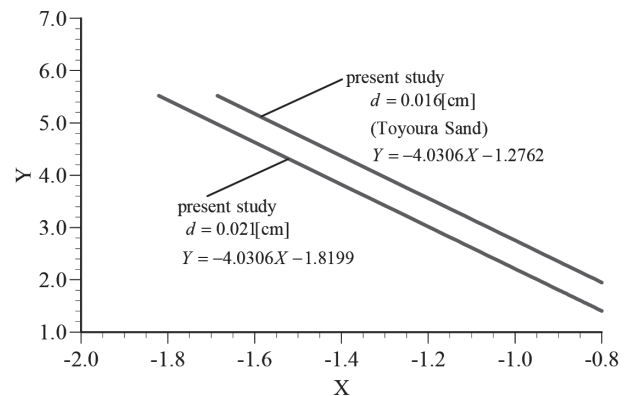


図11 Archie の法則との相関 ($X = \ln \Phi$, $Y = \ln F$)

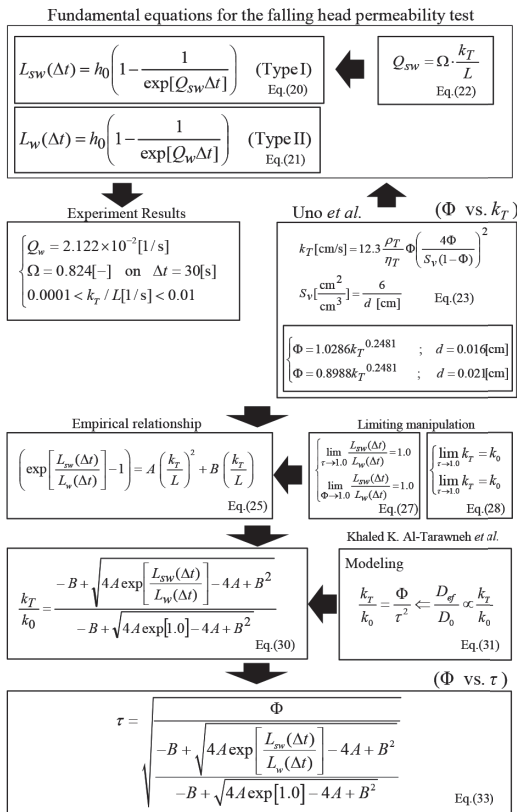


図8 屈曲度推定式の定式化のフロー

を式 (20), (21) より計算して屈曲度推定式 (式 (33)) に導入することにより, 屈曲度 τ , 間隙率 Φ ならびに透水係数 k_T の3つの物理量に対する相互関係を明確にすることができる。

なお, 4.2 節でも述べたように, 式 (34) のうち $d=0.016[\text{cm}]$ は豊浦標準砂を対象とした場合に相当し, $d=0.021[\text{cm}]$ は一般的な細砂 (fine sand: 平均粒径 $0.0125 \sim 0.025 [\text{cm}]$) の範疇に含まれる平均粒径である。

6.2 間隙率と屈曲度の関係

図3と同様な間隙率 Φ と屈曲度 τ の関係を図9に示す。さて, 実際の粒状体の集合では, 間隙構造の緻密度には所定の範囲が存在する。そこで図9においては, 豊浦標準砂における最大間隙比 ($e=0.977$) と最小間隙比 ($e=0.597$) から計算される間隙率の範囲 ($0.37 < \Phi < 0.50$) での結果を描画している。

図9より, 本研究で提案した屈曲度推定式より計算される屈曲度の値は, 間隙率の低下にともなって増加する傾向を示し, 描画した $0.37 < \Phi < 0.50$ の範囲における屈曲度 τ の値は豊浦標準砂が想定される平均粒径 $d=0.016[\text{cm}]$ では $1.5 \sim 2.4$ 程度, $d=0.021[\text{cm}]$ では $1.1 \sim 1.8$ 程度となった。 $d=0.021[\text{cm}]$ と $d=0.016[\text{cm}]$ を比較した場合, 同一間隙率では平均粒径の小さい $d=0.016[\text{cm}]$ の方が, 屈曲度の値が高くなる傾向を示している。

また, 描画した $0.37 < \Phi < 0.50$ の範囲において, 本研究で提案した屈曲度推定式より計算される屈曲度の値の変化量は, Ahmadi *et. al* ならびに Boudreau の結果と比較して大きい。

6.3 透水係数と屈曲度の関係

図10に透水係数 k_T と屈曲度 τ の関係を示す。豊浦標準砂における最大間隙比 ($e=0.977$) と最小間隙比 ($e=0.597$) から式 (23) より計算される透水係数 k_T は $0.015 \sim 0.06[\text{cm/s}]$ 程度となる。この透水係数 k_T の範囲 ($0.015 < k_T < 0.060[\text{cm/s}]$) を図10においてはハッチで示した。

図10より, 透水係数の増加にともなって屈曲度は指数的に減少する傾向を示している。透水係数の増加は間隙率の増加につながることから, 図10より確認される傾向は物理的に妥当であると言えよう。 $d=0.021[\text{cm}]$ と $d=0.016[\text{cm}]$ を比較した場合, 同一な透水係数においては平均粒径の小さい $d=0.016[\text{cm}]$ の方が屈曲度の値が高くなる傾向を示している。

6.4 Archie の法則との相関

本研究で提案する屈曲度推定式 (式 (33)) の妥当性を Archie の法則の観点から検討する。Archie の法則 $F=n/\Phi^m$ (n と m は定数)⁸⁾ は両変に対数を作用させることにより次式のように表わされる。

$$\ln F = \ln(n) - m \ln \Phi \quad (35)$$

したがって, $\ln \Phi$ を x 軸に, $\ln F$ を y 軸として描画した場合, 式 (35) の形式での Archie の法則は, $\ln(n)$ を切片, m を勾配とした線形式として表現されることとなる。

そこで, 本研究における屈曲度推定式 (式 (33)) より評価された屈曲度の値 (図9の結果) を式 (10) に導入することによりフォーメーション・ファクター F を計算し, そのフォーメーション・ファクターと間隙率 Φ を式 (35) と対応した両対数グラフにおいてプロットした結果を図11に示した。

図11におけるプロット結果は極めて良好な線形性を示しており, 本研究の屈曲度推定式より評価される屈曲度は Archie の法則に従ったものであることが確認できる。

7. 結論

粒状多孔質体を対象として, 実験的に屈曲度を簡便かつ直接推定することが可能な屈曲度推定式を新たに構築した。屈曲度推定式 (式 (33)) のユニークな点は, Type I と Type II の実験に対応した式 (20) と式 (21) の相関より見出された式 (25) を基礎としているところにある。また, 式 (27) を満たす透水係数 k_0 を式 (29) のように実際に計算可能な量として表現できていることから, 拡散係数比 D_{ef}/D_0 と透水係数比 k_T/k_0 を等価であるとした式 (31) の仮定の導入を可能としている点にある。さらに, 実際の運用に関しては, 写真1に示すような簡便な実験機器により, 水位変化量 $L_{sw}(\Delta t)/L_w(\Delta t)$ ならびに間隙率 Φ の3つの物理量を把握することにより屈曲度を計算できるようになっている点である。

屈曲度推定式 (式 (33)) より計算された屈曲度と間隙率の関係についての定性的傾向は既往の屈曲度推定モデルと同様であり (図9参照), また, 透水係数と屈曲度の関係も物理的に妥当な傾向を示すものとなっている (図10参照)。さらに, Archie の法則に基づいた観点からも本研究における屈曲度推定式の妥当性を支持する結果が得られていることから (図11参照), 本研究における屈曲度推定式の導出過程における各種の仮定や定義は基本的には合理的に組み合わされているものと考えられる。なお, 豊浦標準砂を想定した場合, その実質的な間隙構造の範囲内で屈曲度の値は $1.5 \sim 2.4$ 程度を示すものとなった。

参考文献

- (1) Azara, J. H., Javaherian, A., Pishvaie, M. R., Nabi-Bidhendi, M.: An approach to defining tortuosity and cementation factor in carbonate reservoir rocks, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Vol. 60, No. 2, pp. 125-131, 2008.
- (2) Koponen, A., Kataja, M., Timonen, J., Kokusho, T.: Tortuous flow in porous media, *Physical Review E*, Vol. 54, No. 1, pp. 406-410, 1996.
- (3) Lanfrey, P.-Y., Kuzeljevic, Z. V., Dudukovic, M. P.: Tortuosity model for fixed beds randomly packed with identical particles, *Chemical Engineering Science*, Vol. 65, No. 5, pp. 1891-1896, 2010.

- (4) Wu, Y. S., van Vliet, L. J., Frijlink, H. W., van der Voort Maarschalk, K.: The determination of relative path length as a measure for tortuosity in compacts using image analysis, *European Journal of Pharmaceutical Sciences*, Vol. 28, No. 5, pp. 433-440, 2006.
- (5) Petersen, E. E.: Diffusion in a pore of varying cross section, *American Institute of Chemical Engineers Journal*, Vol. 4, No. 3, pp. 343-345, 1958.
- (6) Beeckman J. W.: Mathematical description of heterogeneous materials, *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 45, No. 8, pp. 2603-2610, 1990.
- (7) Thorat, I. V., Stephenson, D. E., Zacharias, N. A., Zaghbi, K., Harb J. N., Wheeler, D. R.: Quantifying tortuosity in porous Li-ion battery materials, *Journal of Power Sources*, Vol. 188, No. 2, pp. 592-600, 2009.
- (8) Archie, G. E.: The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics, *Petroleum Transactions of AIME*, Vol. 146, pp. 54-62, 1942.
- (9) Lihua, S. and Zhangxin, C.: Critical review of the impact of tortuosity on diffusion, *Chemical Engineering Science*, Vol. 62, pp. 3748-3755, 2007.
- (10) 鈴江 祥典, 鹿園 直毅, 笠木 伸英: SOFC 多孔質電極の微細構造設計のための物質輸送・電気化学反応の数値解析, *日本機械学会 2006 年度年次大会講演資料集*, Vol. 7, 2006 年 9 月 18 ~ 22 日, pp. 181-182.
- (11) Carman, P.C.: Fluid flow through granular beds, *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, Vol. 15, pp. 150-166, 1937.
- (12) Carman, P.C.: Permeability of saturated sands, soils and clays. *J. Agric. Sci.* Vol. 29, No. 2, pp. 262-273, 1939.
- (13) 大井孝和: 空気透過法における Kozeny-Carman 定数について, *愛知工業大学研究報告*, 第 19 号 B, pp. 299-300, S59 年.
- (14) Carman, P.C.: The determination of the specific surfaces of powders I. *Journal of the Society of Chemical Industry, London (Transactions of Part I)*, Vol. 57, pp. 225-234, 1938.
- (15) 内海秀幸: 非等温熱重量分析を用いたキャピラリーポアの経路を対象とした屈曲度推定モデル, *土木学会論文集 E2*, Vol. 67, No. 1, pp. 121-130 2011.
- (16) Boudreau, B. P.: The diffusive tortuosity of fine-grained unlithified sediments, *Geochimica et Cosmochimica Acta*, Vol. 60, No. 16, pp. 3139-3142, 1996.
- (17) Ullman W. J. and Aller R. C.: Diffusion coefficients in nearshore marine sediments, *Limnol. Oceanogr.* Vol. 27, 552-555, 1982.
- (18) Johnson, M. F. L. and Stewart, W. E.: Pore structure and gaseous diffusion in solid catalysts, *Journal of Catalysis*, Vol. 4, No. 2, pp. 248-252, 1965.
- (19) Friedman, S. P. and Seaton, N. A.: A corrected tortuosity for the network calculation of diffusion coefficient, *Chemical Engineering Science*, Vol. 50, No. 5, pp. 897-900, 1995.
- (20) Millington, R. J.: Gas diffusion in porous media, *Science*, Vol. 130, pp. 100-102, 1959.
- (21) Weissberg, H.: Effective diffusion coefficients in porous media, *Journal of Applied Physics*, Vol. 34, pp. 2636-2639, 1963.
- (22) Ahmadi, M. M., Mohammadi, S., Hayati A. N.: Analytical derivation of tortuosity and permeability of monosized spheres: A volume averaging approach, *Phys. Rev. E* 83, 026312 (1-8), 2011.
- (23) Rahul Vallabh, Pamela Banks-Lee, Abdel-Fattah Seyam: New Approach for Determining Tortuosity in Fibrous Porous Media, *Journal of Engineered Fibers and Fabrics*, Vol. 5, No. 3, pp. 7-15, 2010. (私の発想と一緒に, 透水係数の比から屈曲度の関係を探っている)
- (24) 宇野尚雄, 杉井俊夫, 神谷浩二: 比表面積測定に基づく土粒子物性と透気性・透水性の考察, *土木学会論文集*, No.469/Ⅲ-23, pp.25-34, 1993.
- (25) 高野保英・福原輝幸・佐藤邦明: 乾燥 - 不飽和土壌中の熱・液状水および蒸気状水移動の同時連成解析, *土木学会論文集 B*, No. 635, pp. 13-29, 1999.11
- (26) Khaled K. Al-Tarawneh, Olivier Buzzi, Kristian Krabbenhoft, Andrei V. Lyamin, Scott W. Sloan: An Indirect Approach for Correlation of Permeability and Diffusion Coefficients, *Defect and Diffusion Forum, Diffusion in Solids and Liquids IV*, pp. 504-514, 2009.