

浸透流有限要素解析における注水／揚水孔の  
簡便かつ効果的なモデル化とその検証  
に関する研究

2018年3月

山 田 俊 子



## 要 旨

本論文は、有限要素法（FEM）による広域を対象とした浸透流解析における注水／揚水孔や井戸等の簡易なモデル化手法を開発し、提案するモデル化について、工学シミュレーションにおける V&V（Verification & Validation：検証と妥当性確認）の観点から、検証に位置付けられる評価結果をまとめたものである。

FEM による広域を対象とした浸透流解析において、領域や構造物の大きさに比べて非常に小さな径の注水／揚水孔や井戸等をモデルに考慮する際に、孔を実寸法でメッシュ分割すると、実務上非現実的なモデル規模となることがある。そのような場合には、解析モデルを合理的な規模にするため、孔の実径を無視して、節点群に水頭等を境界条件として与えた点源の連なりとしてモデル化することが多い。孔を節点で代表させる点源を用いたモデル化は、要素サイズに依存するある半径を有する孔として近似することになる。ここではこれを相当半径と呼ぶ。相当半径と実半径との乖離が大きいと点源の流量や点源周辺の水頭分布の解析精度は低下するため、点源を用いて孔を表す際には、相当半径が実半径と等価になるようなモデル化が解析精度向上のために必要となる。

本研究の目的は、FEM を用いた浸透流解析における、孔や井戸の点源によるモデル化について、実務上合理的な解析モデルの規模を保持しつつ、要素サイズの影響を低減し、解析精度を改善させることである。そこで、点源を含む要素の透水係数を要素サイズに応じて補正する式を用いることにより、点源の相当半径を孔の実半径と等価にする簡易なモデル化を開発した。さらに、提案したモデル化の検証として、工学シミュレーションにおける V&V の観点から、コード検証（Code Verification）と解検証（Solution Verification）を実施した。

提案したモデル化は、被圧帯水層の単一孔の二次元放射状流問題、および単一孔の先端部で生じる三次元球状流問題の理論解に基づき、有限要素の種類に応じて導出した複数の補正式を用いるものである。二次元放射状流問題に対しては三角形一次要素および四角形一次要素の補正式を示し、三次元球状流問題に対しては四面体一次要素の補正式を示した。

コード検証では、複数の数値実験による理論解や参照解との比較により、提案するモデ

ル化が期待する精度を得ることおよび所期の性能を発揮することを確認した。数値実験は、補正式を導出した単一孔の二次元放射状流問題および三次元球状流問題に加えて、より一般的な二次元放射状流の領域に複数の孔が配列された問題や、線状の定圧規定境界の近傍に複数孔が配列された問題についても実施し、提案するモデル化の適用性を示した。また、実務を想定した不均質な地盤の問題を対象とする数値実験も実施し、適用性を確認した。さらに、所期の性能確認のため、要素分割の細分化に伴う正解への収束性に着目したモデルの性能の評価を行い、提案するモデル化の妥当性を明らかにするとともに、モデルの性能に関するコード検証を実施する際の留意点を顕在化させた。

解検証では、空間方向に関する離散化誤差の定量的な推定による評価を行った。実問題に近い線状の定圧境界近傍にある群孔問題を対象とし、要素サイズの異なる三つのメッシュの解から収束解を推定し、格子収束指数（Grid Convergence Index）を用いて誤差範囲を例示した。その際に観測される解の正確度のオーダーに着目し、本研究が提案するモデル化と従来のモデル化との検証結果の特性を明示し、解検証の重要性および実施時の留意点を示した。

最後に結論においては、本研究を総括している。点源の相当半径を孔の実半径と等価にする簡易なモデル化とその検証としてコード検証と解検証により、ここで提案したモデル化の有効性および有用性を示した。

A Simple and Effective Well Modeling for the Finite Element Analysis of Groundwater Flow,  
and Verification Studies on the Modeling

ABSTRACT

This study proposes a new simple well modeling for regional seepage flow analyses employing the finite element method (FEM). Verification studies on the proposed well modeling are also carried out in Verification and Validation (V&V) terms.

In ordinary finite element analyses (FEA) for regional seepage flow, recharge or pumping wells are seldom modeled as holes with an actual radius since the wells are extremely small compared to the analysis region or other subsurface structures. In many cases, such wells are approximated by nodal point sources in which flow rates or pressures are applied to the nodes in order to avoid the huge computational load in practice. However, such point source modeling tends to have a certain finite radius, which depends on the sizes of the finite elements and is rarely the same radius as the actual well. Consequently, such ordinary point source modeling (OPSM) is likely to produce inaccurate finite element solutions. In this study, the corresponding radius using point source modeling is called a virtual radius.

A new approach to well modeling that improves the solution accuracy by using point sources has been developed in this study. The proposed modeling calibrates the permeability of finite elements surrounding the point sources based on theoretical solutions. It renders the virtual radius of the point source as equivalent to the actual radius of the well. The proposed modeling derives from two theoretical solutions in an artesian aquifer, one being a theoretical solution for a radial flow into a well, while the other is a theoretical solution for a spherical flow into a point.

Code and Solution Verifications were conducted in V&V terms to assess the performance of the proposed well modeling. The code verification results via several numerical experiments show that the proposed modeling yields the expected convergence rate as the mesh is refined.

In the studies on solution verification, spatial discretization errors were estimated using the grid convergence index (GCI) method, which calculates a converged solution corresponding to an infinitesimal element mesh using three numerical solutions at different element resolutions. The GCI also enables an error band of the solution to be quantified with an actual mesh. Upon solution verification of the proposed modeling, we could confirm that the observed mesh convergence is of the expected order with a very narrow width of error band.

## 目 次

第 1 章 序論 .....	1
1.1 本研究の背景.....	1
1.1.1 広域浸透流解析における注水／揚水孔のモデル化.....	1
1.1.2 工学シミュレーションの検証の現状 .....	4
1.2 本研究の目的.....	6
1.3 既往研究と本研究の位置づけ .....	7
1.3.1 点源による注水／揚水孔のモデル化の既往研究.....	7
1.3.2 工学シミュレーションの検証に関する既往研究.....	9
1.3.3 本研究の位置づけ .....	11
1.4 本論文の構成.....	12
第 2 章 点源要素透水係数補正式による注水／揚水孔のモデル化の提案.....	15
2.1 提案するモデル化の概要.....	15
2.2 有限要素法を用いた浸透流解析 .....	17
2.2.1 支配方程式.....	17
2.2.2 離散化方程式.....	18
2.3 注水／揚水孔がある問題の理論解 .....	19
2.3.1 円形領域における単一孔の二次元放射状流問題.....	19
2.3.2 円形領域における群孔の二次元問題 .....	23
2.3.3 直線定圧境界近傍における群孔の二次元問題.....	26
2.3.4 三次元球状流問題.....	28
2.4 点源を用いた注水／揚水孔のモデル化における問題.....	31
2.5 点源要素透水係数補正式によるモデル化 .....	32
2.5.1 二次元三角形一次要素を用いたモデル化の補正式.....	32

2.5.2	二次元四角形一次要素を用いたモデル化の補正式.....	35
2.5.3	三次元四面体一次要素を用いたモデル化の補正式.....	37
2.6	提案するモデル化の特徴.....	40
2.7	本章のまとめ.....	41
<b>第 3 章</b>	<b>コード検証</b> .....	<b>42</b>
3.1	V&V の観点からのコード検証.....	42
3.2	二次元単一孔問題.....	44
3.2.1	二次元三角形一次要素の補正式の精度検証 .....	44
3.2.2	不均質地盤を対象とした二次元三角形一次要素の補正式の適用 .....	49
3.2.3	二次元四角形一次要素の補正式の精度検証 .....	54
3.2.4	二次元単一孔問題におけるモデル性能の検証.....	58
3.2.5	二次元単一孔問題に関するまとめ .....	65
3.3	二次元群孔問題.....	67
3.3.1	円形解析領域の群孔問題への適用 .....	67
3.3.2	不均質地盤を対象とした円形解析領域の群孔問題への適用 .....	78
3.3.3	直線定圧境界近傍の群孔問題への適用 .....	91
3.3.4	直線定圧境界近傍の群孔問題におけるモデル性能の検証.....	108
3.3.5	二次元群孔問題に関するまとめ .....	115
3.4	三次元単一孔問題.....	117
3.4.1	三次元四面体一次要素の補正式の精度検証 .....	117
3.4.2	不均質地盤を対象として二次元三角形一次要素の補正式および三次元四面体一 次要素の補正式を併用する適用性.....	126
3.4.3	三次元単一孔問題に関するまとめ .....	132
3.5	本章のまとめ.....	133
<b>第 4 章</b>	<b>解検証</b> .....	<b>134</b>
4.1	V&V の観点からの解検証.....	134

4.1.1 GCI を用いた収束解および誤差範囲の推定による解検証.....	135
4.2 解検証の試行.....	137
4.2.1 線状定圧境界近傍の群孔問題における誤差の推定と離散化の検証.....	137
4.2.2 解検証の試行のまとめ.....	149
4.3 本章のまとめ.....	150
<b>第 5 章 結論</b> .....	<b>151</b>
参考文献.....	155
発表論文.....	159
謝辞.....	161

## 目 次

図 2.3-1	単一の孔による二次元放射状流.....	19
図 2.3-2	二次元平面流の円形領域内にある二つの孔の問題 .....	23
図 2.3-3	二次元平面流の円形領域内にある三つの孔の問題 .....	24
図 2.3-4	二次元平面流の円形領域内にある四つの孔の問題 .....	25
図 2.3-5	直線定圧境界近傍における二次元平面流の群孔問題.....	26
図 2.3-6	単一の揚水点による三次元球状流問題 .....	28
図 2.5-1	被圧帯水層中の二次元放射状流.....	32
図 2.5-2	点源周りの三角形一次要素群.....	33
図 2.5-3	点源周りの四角形一次要素群.....	35
図 2.5-4	被圧帯水層中の三次元球状流.....	37
図 2.5-5	点源周りの四面体一次要素群.....	38
図 3.2-1	被圧帯水層中の二次元放射状流.....	44
図 3.2-2	解析モデル（二次元放射状流問題，均質モデル） .....	45
図 3.2-3	理論解 $Q_0$ に対する流量比の比較（二次元放射状流，均質モデル） .....	47
図 3.2-4	全水頭分布の比較（二次元放射状流，均質モデル） .....	47
図 3.2-5	解析モデル（二次元放射状流問題，不均質モデル） .....	49
図 3.2-6	参照解 $Q_r$ に対する流量比の比較（二次元放射状流，不均質モデル） .....	51
図 3.2-7	全水頭分布の比較（二次元放射状流，不均質モデル） .....	52
図 3.2-8	解析モデル（二次元放射状流問題，均質モデル） .....	54
図 3.2-9	理論解 $Q_0$ に対する流量比の比較（二次元放射状流，均質モデル） .....	56
図 3.2-10	全水頭分布の比較（二次元放射状流，均質モデル） .....	56
図 3.2-11	モデル化性能評価の解析モデル（二次元放射状流，均質モデル） .....	59
図 3.2-12	モデル化性能評価の解析モデル（孔周辺拡大図） .....	59
図 3.2-13	理論解に対する誤差（全水頭） .....	62
図 3.2-14	理論解に対する誤差（流量） .....	62

図 3.3-1	円形解析領域にある群孔問題.....	68
図 3.3-2	点源要素透水係数の補正（円形領域群孔問題，均質モデル） .....	69
図 3.3-3	解析モデル（円形領域群孔問題，均質モデル） .....	70
図 3.3-4	理論解 $Q_0$ に対する流量比の比較（円形領域群孔問題，均質モデル） .....	74
図 3.3-5	全水頭分布プロットライン（円形領域群孔問題，均質モデル） .....	75
図 3.3-6	全水頭分布の比較（円形領域群孔問題，均質モデル） .....	76
図 3.3-7	点源要素透水係数の補正（円形領域群孔問題，不均質モデル） .....	79
図 3.3-8	解析モデル（円形領域群孔問題，不均質モデル） .....	80
図 3.3-9	解析モデルの透水係数分布（円形領域群孔問題，不均質モデル） .....	81
図 3.3-10	参照解 $Q_r$ に対する流量比の比較（円形領域群孔問題，不均質モデル） ..	85
図 3.3-11	全水頭分布プロットライン（円形領域群孔問題，不均質モデル） .....	86
図 3.3-12	全水頭分布の比較（円形領域群孔問題，不均質モデル，孔本数 $N=2$ ） ..	87
図 3.3-13	全水頭分布の比較（円形領域群孔問題，不均質モデル，孔本数 $N=3$ ） ..	88
図 3.3-14	全水頭分布の比較（円形領域群孔問題，不均質モデル，孔本数 $N=4$ ） ..	89
図 3.3-15	直線定圧境界近傍の群孔問題.....	91
図 3.3-16	解析モデル（直線定圧境界近傍の群孔問題） .....	94
図 3.3-17	理論解 $Q_0$ に対する流量比の比較（単孔問題） .....	97
図 3.3-18	全水頭分布の比較（単孔問題） .....	98
図 3.3-19	理論解 $Q_0$ に対する流量比の比較（二孔問題， $a=10(m),d=5(m)$ および $a=10(m),d=10(m)$ ) .....	99
図 3.3-20	理論解 $Q_0$ に対する流量比の比較（二孔問題， $a=10(m),d=20(m)$ および $a=20(m),d=10(m)$ ) .....	100
図 3.3-21	全水頭分布の比較（二孔問題， $a=10(m),d=5(m)$ および $a=10(m),d=10(m)$ ) .....	101
図 3.3-22	全水頭分布の比較（二孔問題， $a=10(m),d=20(m)$ および $a=20(m),d=10(m)$ ) .....	102
図 3.3-23	理論解 $Q_0$ に対する流量比の比較（無限配列孔問題， $a=10(m),d=5(m)$ および	

	a=10(m),d=10(m)) .....	103
図 3.3-24	理論解 $Q_0$ に対する流量比の比較 (無限配列孔問題, a=10(m),d=20(m)および a=20(m),d=10(m)) .....	104
図 3.3-25	全水頭分布の比較 (無限配列孔問題, a=10(m),d=5(m)および a=10(m),d=10(m)) .....	105
図 3.3-26	全水頭分布の比較 (無限配列孔問題, a=10(m),d=20(m)および a=20(m),d=10(m)) .....	106
図 3.3-27	理論解に対する誤差 (全水頭) .....	111
図 3.3-28	理論解に対する誤差 (流量) .....	112
図 3.3-29	理論解と補正点源モデル解析解の全水頭差分コンタ (単孔問題 d=20) .....	114
図 3.4-1	球状の解析モデル (三次元球状流問題, 均質モデル) .....	118
図 3.4-2	円柱の解析モデル (三次元球状流問題, 均質モデル) .....	118
図 3.4-3	理論解 $Q_0$ に対する流量比の比較 (三次元球状流問題, 均質モデル, 注水点実半径 $r_w=0.05m$ ) .....	121
図 3.4-4	理論解 $Q_0$ に対する流量比の比較 (三次元球状流問題, 均質モデル, 注水点実半径 $r_w=0.1m$ ) .....	122
図 3.4-5	全水頭分布の比較 (三次元球状流問題, 均質モデル, 注水点実半径 $r_w=0.05m$ ) .....	123
図 3.4-6	全水頭分布の比較 (三次元球状流問題, 均質モデル, 注水点実半径 $r_w=0.1m$ ) .....	124
図 3.4-7	孔近傍の地下水流れ.....	126
図 3.4-8	解析モデル (三次元単一孔問題, 不均質モデル) .....	127
図 3.4-9	参照解 $Q_r$ に対する流量比の比較 (三次元単一孔問題, 不均質モデル) .....	129
図 3.4-10	全水頭分布の比較 (三次元単一孔問題, 不均質モデル) .....	130
図 4.2-1	収束解および誤差範囲の推定 (単孔問題, 全水頭 [ $x=0,y=d+10$ ]) .....	139
図 4.2-2	収束解および誤差範囲の推定 (単孔問題, 流量) .....	140

図 4.2-3	収束解および誤差範囲の推定（二孔問題， $a=10(m),d=5(m)$ および $a=10(m),d=10(m)$ ，全水頭 $[x=0,y=d+10]$ ） .....	141
図 4.2-4	収束解および誤差範囲の推定（二孔問題， $a=10(m),d=20(m)$ および $a=20(m),d=10(m)$ ，全水頭 $[x=0,y=d+10]$ ） .....	142
図 4.2-5	収束解および誤差範囲の推定（二孔問題， $a=10(m),d=5(m)$ および $a=10(m),d=10(m)$ ，流量） .....	143
図 4.2-6	収束解および誤差範囲の推定（二孔問題， $a=10(m),d=20(m)$ および $a=20(m),d=10(m)$ ，流量） .....	144
図 4.2-7	収束解および誤差範囲の推定（無限配列孔問題， $a=10(m),d=5(m)$ および $a=10(m),d=10(m)$ ，全水頭 $[x=0,y=d+10]$ ） .....	145
図 4.2-8	収束解および誤差範囲の推定（無限配列孔問題， $a=10(m),d=20(m)$ および $a=20(m),d=10(m)$ ，全水頭 $[x=0,y=d+10]$ ） .....	146
図 4.2-9	収束解および誤差範囲の推定（無限配列孔問題， $a=10(m),d=5(m)$ および $a=10(m),d=10(m)$ ，流量） .....	147
図 4.2-10	収束解および誤差範囲の推定（無限配列孔問題， $a=10(m),d=20(m)$ および $a=20(m),d=10(m)$ ，流量） .....	148

## 表 目 次

表 3.2-1	解析ケース（二次元放射状流問題，均質モデル） .....	46
表 3.2-2	解析ケース（二次元放射状流問題，不均質モデル） .....	50
表 3.2-3	解析ケース（二次元放射状流問題，均質モデル） .....	55
表 3.2-4	モデル化の性能評価のための解析ケース（二次元放射状流問題，均質モデル） .....	60
表 3.3-1	解析モデルの緒元（円形領域群孔問題，均質モデル） .....	69
表 3.3-2	解析ケース（円形領域群孔問題，均質モデル） .....	72
表 3.3-3	解析モデルの緒元（円形領域群孔問題，不均質モデル） .....	79
表 3.3-4	解析ケース（円形領域群孔問題，不均質モデル） .....	83
表 3.3-5	解析ケース（直線定圧境界近傍問題，単孔問題） .....	95
表 3.3-6	解析ケース（直線定圧境界近傍問題，二孔問題および無限配列問題） ....	95
表 3.3-7	収束性と解の精度評価試行のための解析ケース（直線定圧境界近傍の群孔問題） .....	109
表 3.4-1	解析ケース（三次元球状流問題，均質モデル） .....	119
表 3.4-2	解析ケース（三次元単一孔問題，不均質モデル） .....	128

## 第 1 章 序論

### 1.1 本研究の背景

#### 1.1.1 広域浸透流解析における注水／揚水孔のモデル化

大規模地下構造物の計画や地下水環境評価などにおける広域の浸透流解析では、非常に小さな径のボーリング孔や井戸などによる注水／揚水のモデル化が重要になる場合がある。水封式岩盤備蓄基地の人工水封設備の機能評価や注水／揚水試験による地盤の透水性評価などが例として挙げられる。以降、本論文では、単に孔や井戸と記す場合でも注水／揚水孔を指すものとする。

水封式岩盤備蓄基地の人工水封設備の機能評価の例としては、平成 25 年に竣工した二つの国家石油ガス備蓄基地が挙げられる<sup>1)</sup>。そのうちの一つである倉敷国家石油ガス備蓄基地<sup>1)</sup>は、幅 18m×高さ 24m のたまご型の大断面岩盤貯槽 4 条から成り、1 条の貯槽の長さは 488m～640m、4 条の総延長は 2.2km に達する。貯槽空洞容積は 80 万 m<sup>3</sup> であり、貯蔵量 40 万 t は世界最大規模である。倉敷基地は、地下水圧により常温高圧の液化石油ガスを地下深部に貯蔵する水封式地下岩盤貯槽方式を採用しており、貯槽周辺の水圧場の保持が重要な要件の一つとなる。そのため、岩盤貯槽の天端設置深度を EL.-160m とし、気密性・液密性が十分確保できる設計としている。さらに、貯槽群を取り囲むように計 810 孔もの水封ボーリング孔をカーテン状に配置し、この水封ボーリング孔群に加圧注水して、貯槽内のガスを水封している。水封ボーリング孔の孔径は 90mm、総延長は 50,400m に及ぶ。このような人工水封設備の機能評価に際しては、構造物近傍の地下水挙動に着目する必要がある。複雑な地下構造物の形状をより忠実に表現することが可能な有限要素法 (FEM) を用いたシミュレーションが行われることが多い。二つの国家石油ガス備蓄基地の水封機能評価<sup>1), 2), 3), 4)</sup>においても 3 次元 FEM 飽和・不飽和浸透流解析が行われた。

しかし、このような大規模地下構造物の浸透流解析のモデル構築時に、他の構造物や解析領域の大きさと比較して非常に小さい径のボーリング孔の扱いがしばしば課題となる。倉敷基地の例では、貯槽周辺において最小要素サイズ 2m で分割し、直径 90mm の水封ボーリング孔は節点に所定の水封圧力を与えたモデル化が実施され、貯槽周辺の地下水挙動

の解析的検討が行われた<sup>1), 2)</sup>。倉敷基地では情報化施工が行われ、貯槽掘削時の水理地質データおよび施工データと、計測される間隙水圧や湧水量などの地下水挙動データを分析し、それらを反映した3次元水理地質モデルの構築とFEM浸透流解析により地下水挙動を管理し、必要に応じて追加のグラウチングおよび追加水封ボーリング孔設置等が実施された。このような大規模かつ複雑な地下構造物の解析モデル構築において孔を実寸法でモデル化することは、メッシュ分割に多大な労力を要するだけでなく、実務上、非現実的規模の計算モデルになり、地下水挙動評価の目的である情報化施工への対応が不可能となることが容易に予測できる。

他にも、大規模な地下水流動評価が必要、かつ、注水／揚水試験による地盤や岩盤の透水性評価が重要となる施設として、地層処分のための放射性廃棄物処分場が挙げられる。地層処分は、高レベル放射性廃棄物および地層処分低レベル放射性廃棄物を地上から十分に深く安定な地層中へ処分する方法であり、地下300m以深に処分場を建設する<sup>5), 6)</sup>。高レベル放射性廃棄物処分場は新第三紀の堆積岩などの軟岩系岩盤では深度500m、結晶質岩などの硬岩系岩盤では深度1000mでの処分深度が検討されている。また、処分場は、我が国では経験がない数km<sup>2</sup>以上の平面的な広がりをもつ地下施設が建設される。地下施設は多くの種類の坑道から構成され、坑道の総延長は数百kmに及ぶ。地層処分施設の坑道の建設および操業期間は60年以上の長期にわたることから、核種移行のための地下水流動評価だけでなく、地下および地表の地下水環境に与える影響評価も必要と考えられる。地下水流動評価のための調査として、注水／揚水試験による地盤や岩盤の透水性評価が実施される予定であり、既にそれに関連した研究が行われている<sup>7)</sup>。

また、地下施設建設時の地下水環境への影響の度合いによっては、地下水を制御するための注水孔や揚水孔などを用いた対策工が必要となる可能性もある。例えば、地表付近の地下水環境への影響を低減させる場合には、地下水位低下を防止することを目的として地表または地中からの注水孔の設置などが対策工として考えられる。これらの対策工の設計やその効果を把握するためには、解析的手法による評価が不可欠となることが考えられる。解析実施時には、多くの坑道からなる地下施設の解析メッシュを作成する必要があるが、大深度地下に径5～8m程度の坑道を数百本以上表現するためのメッシュ分割を行うと、そ

れだけでも数百万節点以上のモデル規模になることが概算される。坑道群のモデル化だけでも解析メッシュ作成の困難は予想できるが、さらに十数センチの注水孔などを実サイズで解析メッシュに取り込むことは現実的ではないことが容易に想像できる。

浸透流解析は有限要素法 (FEM) や差分法 (FDM) などによる解析手法を用いることが多いが、どちらも大規模地下水流動解析モデルを構築する際には、多くの場合、注水孔や揚水孔はその体積を無視して、FEM では節点、FDM では格子中心点における点源の連なりとして表現せざるを得ないことが多い。しかし、後述するように、このようなモデル化を行うと、点源は FEM では要素サイズ (FDM では格子サイズ) に依存するある径を有する孔として近似されることになる。本論文ではその半径を「相当半径 (Virtual radius)」と呼ぶが、これを「等価半径 (Equivalent radius)」と呼ぶ文献<sup>8), 9)</sup>もある。相当半径は点源の属する要素サイズで決まるので、孔の実半径とは必ずしも一致しない。その乖離が大きいほど、点源の流量や点源周辺の水頭分布の解析精度が低下することはよく知られている<sup>9)</sup>。<sup>10)</sup> 本研究においても、FEM 解析と理論解との比較により、解の精度が点源周りの要素サイズの大きさに強く依存し、著しい解の劣化を招く場合があることを示してきた<sup>11), 12)</sup>。

### 1.1.2 工学シミュレーションの検証の現状

現代のものづくりに関わる分野において、工学シミュレーションは欠かすことのできない技術であり、この数十年でめざましい発達を遂げてきた。設計等に用いられる数値解析コードはソフトウェアとして商品化されて広く普及し、ユーザーは飛躍的に増えている。しかし、数値解析の基礎や特性など、工学シミュレーションに関する知識や技術が乏しいまま、数値解析結果を用いた設計等が実施され、製品の不具合や事故が発生する場合もある。例えば、FEM 解析における不適切なメッシュ分割による構造解析が要因となった事故として、ノルウェーの石油・ガス掘削プラットフォームで発生したコンクリートセルの水漏れによる沈没事故などが例として挙げられる<sup>13)</sup>。この事故は、NASTRAN による弾性有限要素解析におけるメッシュ分割が不適切であったため、せん断応力を過小評価したことが主要因とされており、経済的な損失は 700 万ドルとなった。このように、工学シミュレーションにおける品質の保証や信頼性の確保は重要な課題となっている。

工学シミュレーションの品質保証・信頼性確保については、世界に先駆けて欧米が取り組んできた歴史があり、V&V (Verification and Validation : 検証と妥当性確認) の考え方や方法論が英国 NPO の NAFEMS や米国機械学会 (ASME) により示されてきた<sup>14), 15)</sup>。V&V にはいくつかの考え方があり、例えば、白鳥らは V&V の方法論を「品質マネジメントにおける V&V (品質 V&V)」と「モデリング&シミュレーションにおける (モデル V&V)」の二つに大別してまとめている<sup>16)</sup>。これによると、品質 V&V は国際規格 ISO9001 に準拠し、工学シミュレーション業務の解析プロセスに対する品質管理を目的としており、もう一方のモデル V&V は、解くべき問題に用いる解析手法や手順が適切か否か、すなわち、シミュレーションの予測性能の評価を行うことを目的としていると整理している。品質 V&V については、前述した英国 NPO の NAFEMS が多くの文書を世界に向けて発行しており、我が国では日本計算工学会が標準書<sup>17), 18), 19)</sup>を整備している。一方のモデル V&V は、1998 年に発刊された米国航空宇宙学会の学会規格<sup>20)</sup>をはじめとして、米国機械学会のガイドライン ASME V&V シリーズ (以下、ASME V&V10)<sup>15), 21)</sup>や米国航空宇宙局 (NASA) の技術標準<sup>22)</sup>が代表的なものとしてあり、NASA の技術標準はインターネットを通じてダウンロードすることが可能である。我が国では、原子力学会が学会標準としてのガイドラ

インを発行している<sup>23)</sup>.

土木分野においても、土木学会・応用力学委員会を中心とした活動があり、土木工学のシミュレーションにおける V&V に関する課題をまとめた報告もされている<sup>24),25)</sup>。土木工学のうち、とりわけ地下水に関するシミュレーションの分野では、2016年より日本地下水学会において「地下水流動解析コード検証事例作成のための調査研究グループ」が V&V の一部に関する調査研究活動を開始したところである<sup>26)</sup>。

## 1.2 本研究の目的

本研究の目的は、FEM による広域の浸透流解析における孔や井戸のモデル化について、実務上合理的な解析モデルの規模を保持しつつ、解析精度を改善させることである。1.1.1 の背景で述べた大規模地下構造物の計画や地下水環境評価などにおける広域の浸透流解析で生じる注水／揚水孔のモデル化の問題を解決するため、点源を用いた新しいモデル化を提案する。また、提案する注水／揚水孔のモデル化に対して、工学シミュレーションの V&V の観点からの 2 段階の検証を行う。最初のプロセスであるコード検証では、理論解や参照解との比較により、様々な問題への適用性および有効性を示すとともに提案するモデル化の性能を明らかにする。次の検証のプロセスである解検証では、提案するモデル化を適用した際の離散化誤差の定量化を試行する。また、二つの検証の重要性と留意点を明らかにする。V&V については、1.1.2 で述べた代表的なモデル V&V である ASME V&V10<sup>15)</sup>,<sup>21)</sup> をベースにした検証を実施する。従来の点源を用いたモデル化についての検証結果の比較も行う。

### 1.3 既往研究と本研究の位置づけ

本節では、広域の浸透流解析における注水／揚水孔のモデル化に関する研究の経緯を述べ、既往の研究を整理する。また、近年重要視されている工学シミュレーションの V&V の観点のうち、特に検証に関する考え方についてまとめ、既往の研究を整理する。これらにより、広域の浸透流解析における注水／揚水孔のモデル化とその検証に関する課題を明確にして、課題を解決するための本研究の位置づけを明らかにする。

#### 1.3.1 点源による注水／揚水孔のモデル化の既往研究

1.1.1 で述べたように、大規模地下構造物を対象とした浸透流解析モデルの構築時には、構造物や解析領域の大きさと比較して非常に小さい径の注水／揚水孔の扱いがしばしば問題となる。孔を実寸法でモデル化すると、解析モデルが非現実的な規模になるためである。そこで多くの場合、ボーリング孔の大きさを無視して、FEM では節点群、FDM では格子中心点における点源の連なりとしてモデル化されるが、点源は要素または格子サイズに依存する‘相当半径 (Virtual radius)’を有する孔として近似されることになる。この相当半径とボーリング孔の実寸法との乖離が大きいほど、点源の流量や点源周辺の水頭分布の解析精度が低下することに関しては様々な研究報告がされており、解析精度の向上に関する研究も行われてきた。

点源の取り扱いについては、FDM を用いた石油工学の分野で先行して研究が進められてきた。Peaceman は、放射状流の理論解から井戸位置での圧力を求め、差分格子の離散化の粗さを補正する井戸係数を用いることにより、解析精度を向上させる方法を提唱している<sup>27), 28), 29), 30)</sup>。登坂らは、Peaceman の井戸係数を取り入れて 3 次元陸水シミュレーションシステムを開発し<sup>31)</sup>、水封式地下石油備蓄基地を対象とした広域地下水挙動の解析例を報告している<sup>32)</sup>。Ding は、井戸近傍の三次元水頭分布の積分解に基づく等価な伝達係数を用いることにより、Peaceman の手法を一般化した<sup>33)</sup>。また、Wolfsteiner らによる不均質媒体における任意の三次元方向に延びる井戸のモデル化などの試みもある<sup>34)</sup>。このように FDM についての点源による孔のモデル化については実用化に至っているといえよう。

一方で、FEM における点源による孔のモデル化については、Kono による研究がある<sup>9)</sup>。

Kono は均質な透水性の被圧帯水層中に単一の井戸や孔がある問題に関して、三角形要素を用いた場合の点源の相当半径および保持すべき要素サイズを示している<sup>9)</sup>。前述の国家石油ガス備蓄基地は多数の水封ボーリングが三次元的に配置されているため、Kono が提唱する保持すべき要素サイズの式をそのまま適用することはできないが、Kono の式に基づく試算をした場合、孔近傍の要素サイズは倉敷基地の検討例<sup>2)</sup>の約 10 分の 1 となり、三次元的には 103 倍以上の要素数となるため、解析モデルは実務上、非現実的な規模となる。また、上村らは Kono の理論を発展させ、四角形要素に対する相当半径を示し、点源となる節点に与える水位を要素サイズに応じて補正することを提唱しているが<sup>35), 36), 37)</sup>、孔先端部の点源における水位補正はこの方法の特性から困難であると推察される。また、Chen & Zhang は FEM、有限体積法 (FVM) および混合型 FEM おいて保持すべき相当半径を体系的に整理し、メッシュを局所的に細分化する効果を示したが<sup>38)</sup>、節点の大幅な増加を伴う。このように、FEM についての点源による孔の三次元的なモデル化については実用上の課題が残っている。

### 1.3.2 工学シミュレーションの検証に関する既往研究

工学シミュレーションにおける V&V (Verification & Validation : 検証と妥当性確認) については, Roache や Oberkampf が考え方や手法などの研究成果をまとめており<sup>39), 40)</sup>, 代表的なモデル V&V である ASME V&V10<sup>15), 21)</sup>は, これらを整理し, 概念や具体的な手法と手順などを体系的に整理している. モデル V&V では, 工学シミュレーションが適切に行われているか否かを定量的に評価するため, 検証と妥当性確認の 2 段階のプロセスを設定している. 検証は, 解が精度良く正確に得られたかを評価するプロセスであり, 妥当性確認は, 実測値等との比較により, 解析結果が予め定められた要件を満足するかを評価するプロセスである. ASME V&V10 では, 検証をコード検証 (Code Verification) と解析検証 (Calculation Verification) の 2 段階に分けている.

コード検証では, 微分方程式で表された数学モデルを数値解析手法で離散化し, 計算機に実装した計算モデルを検証する. 計算モデルにプログラミングミスなどの誤りがなく, 計算機に正しく実装されていることの確認に加え, 採用した数値アルゴリズムが所期の性能を発揮することを確認するプロセスでもある. したがって, 一般的には, 古典的な理論解等との比較による方法がとられる. コード検証で確認すべき重要な計算モデルの性能として, 要素分割の細分化に伴う正解への収束性がある<sup>41), 42)</sup>. Babska は, 一般的な FEM を用いて, 要素サイズ (要素分割数) を変化させた時の解のふるまいについて, 応用数理から理論的に期待できる収束比を示し, 数値実験により確認している<sup>42)</sup>. また, これを拡張した収束比の考え方について, 数値実験結果などと併せて体系的に整理している文献もある<sup>43), 44)</sup>. また, 近年, 創成解 (Manufactured Solutions)<sup>39)</sup>と呼ばれる, 創り出した解を用いる方法も注目されているが, この新しい方法に関するコード検証を実施し, モデルの性能についての評価を行っている研究もある<sup>45)</sup>.

一方, 解析検証は, 入出力データなどの扱いと図化等について人為的な誤りが無いことの確認に加え, 時間・空間に関する離散化誤差や繰り返し計算の収束誤差などの定量的な推定により, 誤差が妥当性確認の要件に対して十分小さいことを検証するプロセスである. 空間方向の離散化誤差の推定には, 粗さの異なる複数のメッシュの解析解から求める格子収束指数 (Grid Convergence Index, 以下 GCI) を用いる手法がある<sup>16), 39)</sup>. GCI は要素細分

化に伴う解の収束性から Richardson 補外を用いて求める。ASME V&V10 では収束解の推定や、GCI を用いた誤差および誤差範囲の推定について、考え方や具体的な手順が整理されている。

FEM を用いた広域の浸透流解析において、点源による注水／揚水孔のモデル化がしばしば行われているが、このモデル化に関するコード検証や解析検証など V&V の観点からの検証は省略されているのが現状である。しかし、ASME V&V10 でも述べられているように、コード検証は、FEM や FDM などによる新たなコードを開発する際に行うだけでなく、信頼性が高い商用コードを用いる際にも使用法に関して検証を実施することが重要である。また、解くべき問題や適用するモデル化によって、期待する解の精度を得るメッシュ分割は異なるため、対象とする問題ごとに解析検証を実施し、空間的離散化の適切さや誤差評価を行うことが重要である。

### 1.3.3 本研究の位置づけ

前述したとおり、FEM を用いた広域の浸透流解析における注水／揚水孔のモデル化についてはまだ課題が残されている。また、注水／揚水孔のモデル化に関する V&V の観点からの検証についての報告は見当たらない。大規模地下構造物の計画や地下水環境評価を目的とした広域の浸透流解析における注水／揚水孔のモデル化は、解析結果の信頼性を確保するためにも重要な問題であり、実務上合理的な解析モデルの規模を保持しつつ、解析精度を改善させることが求められている。

本研究では、上記の課題を解決するために、注水／揚水孔のモデル化について、孔を節点における点源として表し、点源を含む要素の透水係数を補正するという新しいアプローチによるモデル化を提案する。提案するモデル化に対しては、V&V における 2 段階の検証のうち最初のプロセスであるコード検証を実施し、様々な境界条件や物性条件の問題への適用性を評価し、モデルの性能を明らかにする。また、コード検証の次のプロセスである解析検証については、本研究では人為的な誤りがないことを前提として、数値誤差の評価に限定した検証を試行した結果を報告する。以降、本論文では解析検証と明確に区別するため、解検証 (Solution Verification)<sup>46</sup> と呼ぶ。解検証の試行により、離散化誤差および収束解の推定を具体的に例示する。これらの数値実験において、従来用いられてきたモデル化との比較を行い、提案するモデル化の有効性や優位性を明らかにする。

## 1.4 本論文の構成

本論文は第1章から第5章で構成されており、以下に第2章以降の概要をまとめる。

**第2章**では、本研究で提案する点源を用いた注水／揚水孔のモデル化について述べる。第1章で示した本研究の目的を達成するための具体的な方法について論ずる。

まず、2.1節において、本研究が提案するモデル化について概説する。

2.2節では、本論文で対象とする問題の支配方程式、有限要素法による離散化方程式について示す。

2.3節では、注水／揚水孔が存在する問題の理論解について既往文献から整理して示す。ここで整理した理論解は、2.5節において提案するモデル化の正式の導出に用いる。また、第3章のコード検証および第4章の解検証において、提案するモデル化を適用したFEM解析結果との比較を行う。

2.4節では、有限要素法による浸透流解析において、注水／揚水孔を解析モデルで取り扱う際に直面する要素サイズに係わる問題を整理する。広域を対象とした大規模3次元FEM浸透流解析では、孔をモデル化する方法が確立されていないことを述べる。

2.5節では、本研究で提案する点源を用いた注水／揚水孔のモデル化の詳細について述べる。提案するモデル化は、点源を含む要素の透水係数を補正することにより、要素サイズの影響を低減し、解の精度を改善するものである。要素の透水係数の補正は、二次元放射状流問題および三次元球状流問題の理論式から導出した式を用いることにより行う。対象とする問題と要素の種類ごとに補正式を示す。

2.6節では、本研究で提案する点源を用いた注水／揚水孔のモデル化の特徴について述べる。類似の研究例との比較により、本提案モデルの利点を示し、本研究の独自性を明確にする。

**第3章**では、本研究で提案するモデル化について、工学シミュレーションのV&Vの観点からのコード検証を行う。さまざまな条件の問題における理論解や参照解との比較によ

り、提案するモデル化の適用性評価やモデル性能の検証を行う。従来のモデル化の結果との対比も併せて行うことにより、提案するモデル化の優位性も明示する。

まず、3.1 節において、補正式を導出した二次元単一孔問題を対象としたコード検証により、点源の流量や全水頭分布に関して、理論解との比較により、提案するモデル化の精度を確認し、適用性を評価する。また、補正式を導出した均質地盤ではなく、地盤の透水性を不均質とした問題についても数値実験を行い、極小メッシュを用いた参照解との比較により提案するモデル化の適用性について評価を行う。さらに、解の収束性と精度に関する数値実験による観測結果から、モデル性能の検証を行う。孔の実径をメッシュ分割したモデル化や、点源の相当半径を孔の実半径と等価にしたモデル化、および、点源を用いた従来のモデル化の検証結果も併せて示す。提案するモデル化の解の収束性は、点源の相当半径を孔の実半径と等価にしたモデル化と同様に良好であること、解析精度の面では同じ要素サイズであれば、最も高い精度の結果が得られることを確認している。

3.2 節では、二次元群孔問題への適用性について評価を行う。補正式は単一孔問題の理論解から導出したものであるが、円形の解析領域内にある群孔問題や、線状定圧境界にある群孔問題への適用性について評価を行う。円形の解析領域内にある群孔問題については、地盤の透水性を不均質とした問題についても数値実験を行い、極小メッシュを用いた参照解との比較により提案するモデル化の適用性について評価を行う。また、線状定圧境界にある群孔問題を対象として、解の収束性と精度に関する数値実験による観測結果から、モデル性能の検証を試行する。

続く 3.3 節では、三次元球状流問題を対象として、提案するモデル化の精度確認と適用性の評価を行う。また、実際の孔近傍の流れは二次元放射状流と先端部の三次元球状流の組み合わせにより表現できると考え、提案するモデル化の二次元の補正式と三次元の補正式を併用することの適用性の評価を行う。地盤の透水係数が層状に異なる不均質な状態を想定し、より実際に近いモデルへの適用性を明示する。

**第 4 章**では、本研究で提案するモデル化について、工学シミュレーションの V&V の観点からの解検証を試行する。

まず、4.1 節において、V&V における解検証の位置づけについて概説し、格子収束指数 (GCI) を用いた誤差範囲および収束解の推定による解検証の詳細を述べる。

4.2 節では、より一般的な問題の例である、線状定圧境界近傍にある群孔問題を対象として、提案するモデル化に関する解検証を試行する。Richardson 補外と格子収束指数 GCI を用いて、空間方向の離散化誤差の定量的な評価として、誤差範囲および収束解を推定した結果を例示する。従来のモデル化についても併せて解検証を試行する。

第 5 章の結論では、第 1 章から第 4 章までの論旨を総括するとともに、本研究の課題、今後の展望について述べる。

## 第2章 点源要素透水係数補正式による注水／揚水孔のモデル化の提案

### 2.1 提案するモデル化の概要

本研究の背景には、水封式地下岩盤備蓄基地や放射性廃棄物の地層処分施設などの大規模な地下構造物を対象とした地下水挙動評価がある。地下構造物の建設では地下水の制御が重要であり、孔や井戸による注水／揚水の効果について評価が行われる。例えば、水封式地下岩盤備蓄基地では水封ボーリング孔と呼ばれる注水孔により、岩盤貯槽周辺の地下水圧を制御しており、その評価は貯槽の水封機能の確認のため重要である。放射性廃棄物の地層処分施設では注水／揚水試験による地盤や岩盤の透水性評価が重要であり、また、事業期間中の地下水環境への影響評価および影響低減のため注水／揚水孔による地下水制御を目的とした対策工が実施される場合には、その効果の評価を行うことが重要である。これらの地下水挙動評価は、モニタリングと並行して、浸透流解析などのシミュレーションにより実施される。浸透流解析において、有限要素法は構造物の形状を忠実に表現することに優れているため、最もよく用いられる手法の一つである。しかし、有限要素法による浸透流解析において、孔や井戸の径は他の地下構造物や解析領域と比較して非常に小さいため、孔のモデル化は解析モデル構築時のメッシュ分割を困難にしている。

このような背景から、本研究の目的を、有限要素法の浸透流解析における孔や井戸のモデル化について、実務上合理的な解析モデルの規模を保持しつつ、解析精度を改善させることと定めた。本研究では、注水／揚水孔のモデル化を簡便かつ効果的に行うことができる、点源を用いた新しい手法を提案する。

提案する注水／揚水孔のモデル化は、これまで孔を節点における点源として表す際にほとんど無視されていた点源の相当半径に着目し、相当半径が孔の実半径と等価になるように点源を含む要素の透水係数を補正するものである。補正は、被圧帯水層の二次元放射状流問題、および三次元球状流問題の理論解から導出した式を用いて、要素サイズに応じて行う。

本章では、まず、本論文で対象とする有限要素法の浸透流解析について概説した後、既往研究から井戸や孔に関する理論解を整理する。次に、注水／揚水孔のモデル化における

問題について示す。これらを踏まえ、孔のモデル化における問題を解決する方法として、本研究で提案するモデル化について詳述する。最後に、提案するモデル化の特徴を述べ、提案するモデル化の利点を示し、本研究の独自性を明確にする。

## 2.2 有限要素法を用いた浸透流解析

### 2.2.1 支配方程式

本論文では、着目する領域  $V$  内の支配方程式として、次の定常浸透流方程式を扱う。

$$k\nabla^2\phi=0 \quad \text{in } V \quad (2.2-1)$$

ここに、 $\nabla^2$ はラプラシアン、 $k$ は透水係数、未知関数 $\phi$ は全水頭である。全水頭 $\phi$ は、位置水頭 $z$ 、圧力水頭 $p/\rho_w g$ および速度水頭 $v^2/2g$ の和で表される。

$$\phi = z + \frac{p}{\rho_w g} + \frac{v^2}{2g} \quad (2.2-2)$$

$p$ は地下水圧、 $\rho_w$ は地下水の密度、 $g$ は重力加速度、 $v$ は流速である。一般に地下水の流速は小さいので式(2.2-2)の第3項は無視される。したがって、浸透に関しては次式のように表される。

$$\phi = z + \frac{p}{\rho_w g} \quad (2.2-3)$$

境界条件は、次のとおりである。

$$\phi = \hat{\phi} \quad \text{on } S_\phi \quad (2.2-4)$$

$$k \frac{\partial \phi}{\partial n} = \hat{q} \quad \text{on } S_n \quad (2.2-5)$$

ここに、添え字 $\hat{\phi}$ は既知量を表し、 $q$ はフラックス、 $n$ は領域 $V$ の境界上の外向き単位法線ベクトルである。

### 2.2.2 離散化方程式

有限要素法（FEM）では， $\phi$ の近似 $\phi^h$ は次のように表される．

$$\phi^h = \sum_i N_i \phi_i \quad (2.2-6)$$

ここに， $N_i$ は要素形状関数， $\phi_i$ は節点全水頭値である．本論文では形状関数の次数は一次とする．後述する計算例では，ごく一般的な4節点四面体要素，6節点五面体要素，8節点六面体要素を用いている．

式(2.2-1)，式(2.2-4)～式(2.2-5)で示した問題に対する式(2.2-7)の汎関数に式(2.2-6)を代入すると，停留条件から解くべき離散化方程式として，式(2.2-8)に示す有限要素方程式を得る．

$$\Pi(\phi) = \int_V \frac{1}{2} (\nabla^T \phi) k (\nabla \phi) dV - \int_{S_n} \phi \hat{q} dS \quad (2.2-7)$$

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{q} \quad (2.2-8)$$

ここに， $\mathbf{K}$ は全体透水行列， $\boldsymbol{\varphi}$ は $\phi$ の節点全水頭値からなるベクトル， $\mathbf{q}$ は全体フラックスベクトルである．

## 2.3 注水／揚水孔がある問題の理論解

本研究で対象とする，井戸や孔の問題に関する理論解は Muskat によってまとめられている<sup>47)</sup>．本節にて，円形領域における単一の孔の二次元放射状流問題，円形領域における群孔の二次元問題，直線定圧境界近傍における群孔の二次元問題，および三次元球状流問題の理論解を整理する．

### 2.3.1 円形領域における単一孔の二次元放射状流問題

図 2.3-1 は単一の孔による二次元放射状流を表す．

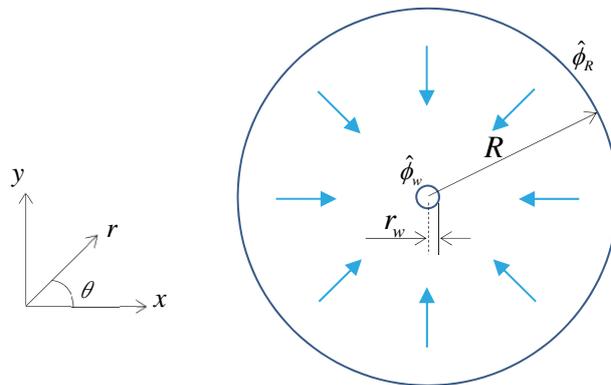


図 2.3-1 単一の孔による二次元放射状流

支配方程式である式(2.2-1)は以下のように書き直すことができる．

$$k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.3-1)$$

ここに，未知関数  $\phi$  は全水頭， $k$  は透水係数である．

式(2.3-1)は直交座標系  $(x, y, z)$  を用いているが，単一孔により生じる二次元放射状流は図 2.3-1 に示すように円筒座標系  $(r, \theta, z)$  を用いて表すと扱いやすい．直交座標系  $(x, y, z)$  と円筒座標系  $(r, \theta, z)$  は次式の関係がある．

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad z = z \quad (2.3-2)$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \quad (2.3-3)$$

$$v_r = -k \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v_\theta = k \frac{-1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad v_z = -k \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.3-4)$$

$$k \nabla^2 \phi = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + k \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + k \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.3-5)$$

図 2.3-1 の単一の孔による二次元放射状流を考えると、式(2.3-4)および式(2.3-5)は以下のように書き直せる。

$$k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.3-6)$$

$$v_r = -k \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v_\theta = k \frac{-1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (2.3-7)$$

式(2.3-6)を積分すると次の式が得られる。

$$r \frac{\partial \phi}{\partial r} = \text{const.} = c_1 \quad (2.3-8)$$

$$\phi = c_1 \ln(r) + c_2 \quad (2.3-9)$$

ここで、図 2.3-1 の二次元放射状流は次の条件で表される。

$$\phi = \hat{\phi}_w \quad [r=r_w], \quad \phi = \hat{\phi}_R \quad [r=R] \quad (2.3-10)$$

式(2.3-9)に式(2.3-10)を代入し、既知量を添え字<sup>^</sup>で表すと、 $c_1$ および $c_2$ に関する二つの式を得る。

$$\hat{\phi}_w = c_1 \ln(r_w) + c_2 \quad (2.3-11)$$

$$\hat{\phi}_R = c_1 \ln(R) + c_2 \quad (2.3-12)$$

式(2.3-11)および式(2.3-12)から次の二つの式を得る.

$$c_1 = \frac{\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w}{\ln(R/r_w)} \quad (2.3-13)$$

$$c_2 = \frac{\hat{\phi}_w \log R - \hat{\phi}_R \log r_w}{\ln(R/r_w)} \quad (2.3-14)$$

式(2.3-13)および式(2.3-14)を用いて, 式(2.3-9)は次のように表される.

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w}{\ln(R/r_w)} \ln(r) + \frac{\hat{\phi}_w \log R - \hat{\phi}_R \log r_w}{\ln(R/r_w)} \\ &= \frac{\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w}{\ln(R/r_w)} \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) + \hat{\phi}_w \end{aligned} \quad (2.3-15)$$

式(2.3-4)に式(2.3-15)を適用すると,  $v_r$ は次のように表される.

$$v_r = -k \frac{\partial \phi}{\partial r} = -k \frac{\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w}{\ln(R/r_w)} \quad (2.3-16)$$

最終的に, 孔の流量は次式で与えられる.

$$Q = -D \int_0^{2\pi} r v_r d\theta = \frac{2\pi k D (\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w)}{\ln(R/r_w)} \quad (2.3-17)$$

ここに、 $D$  は帯水層の厚さである。また、 $\phi$  は  $Q$  を用いて次式で表される。

$$\phi = \frac{Q}{2\pi kD} \cdot \ln(r/r_w) + \hat{\phi}_w \quad (2.3-18)$$

### 2.3.2 円形領域における群孔の二次元問題

二次元平面流の円形領域内にある，井戸や孔の小さなグループ（群井または群孔）を考える．以降，本研究では井戸や孔の小さなグループを群孔という．

#### (1) 二孔の場合

図 2.3-2 の円形領域内に等間隔  $d$  で配置された二つの孔による注水／揚水を考える．

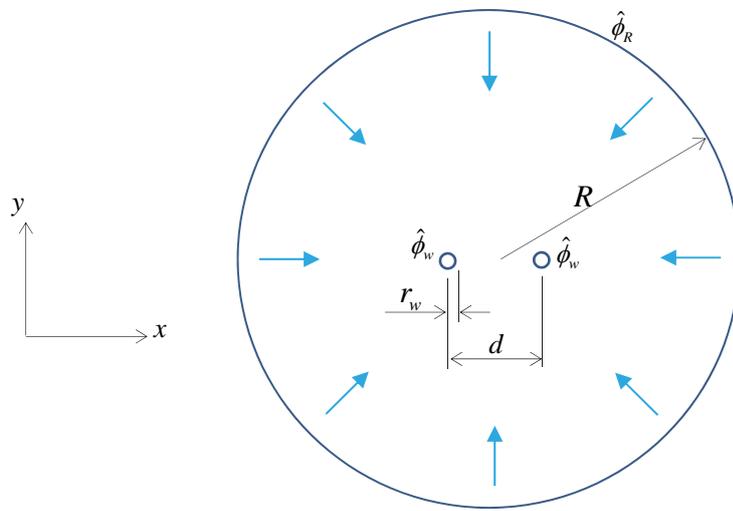


図 2.3-2 二次元平面流の円形領域内にある二つの孔の問題

一孔あたりの流量は次式で与えられる．

$$Q_1 = Q_2 = \frac{2\pi k D (\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w)}{\ln(R^2 / r_w d)} \quad \text{ただし, } r_w \ll d \ll R \quad (2.3-19)$$

ここに， $D$  は帯水層の厚さ， $d$  は孔間距離である．

(2) 三孔の場合

図 2.3-3 の円形領域内に等間隔  $d$  で配置された三つの孔による注水／揚水を考える．

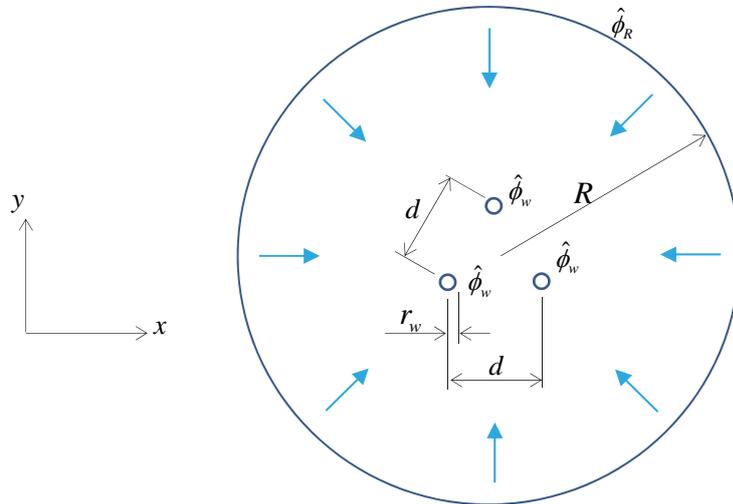


図 2.3-3 二次元平面流の円形領域内にある三つの孔の問題

一孔あたりの流量は次式で与えられる．

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \frac{2\pi k D (\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w)}{\ln(R^3 / r_w d^2)} \quad \text{ただし, } r_w \ll d \ll R \quad (2.3-20)$$

ここに,  $D$  は帯水層の厚さ,  $d$  は孔間距離である．

(3) 四孔の場合

図 2.3-4 の円形領域内に等間隔  $d$  で正方形に配置された四つの孔による注水／揚水を考える。

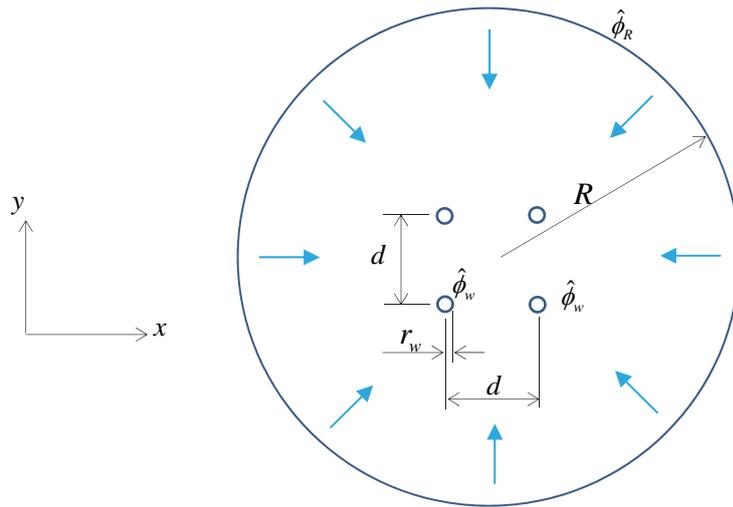


図 2.3-4 二次元平面流の円形領域内にある四つの孔の問題

一孔あたりの流量は次式で与えられる。

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = \frac{2\pi k D (\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w)}{\ln(R^4 / \sqrt{2} r_w d^3)} \quad \text{ただし, } r_w \ll d \ll R \quad (2.3-21)$$

ここに、 $D$  は帯水層の厚さ、 $d$  は孔間距離である。

### 2.3.3 直線定圧境界近傍における群孔の二次元問題

図 2.3-5 は河川や運河のような非常に長い直線の定圧境界の近傍に配置された群孔を表す。

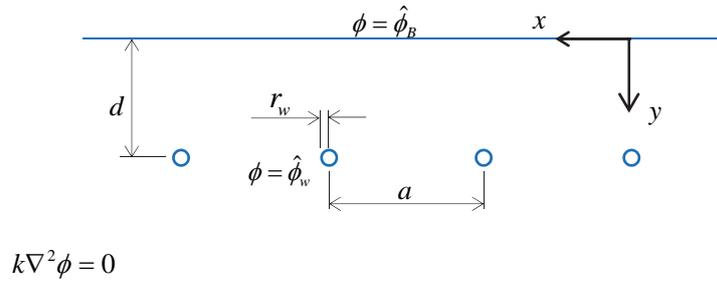


図 2.3-5 直線定圧境界近傍における二次元平面流の群孔問題

孔から地下水を一定量注水（揚水）する二次元平面流問題は，支配方程式である式(2.2-1)と次の境界条件式で表される。

$$\phi = \hat{\phi}_w \quad \text{on} \quad \sqrt{(x - (n-1)a)^2 + (y - d)^2} = r_w \quad (2.3-22)$$

$$\phi = \hat{\phi}_B \quad \text{on} \quad y = 0 \quad (2.3-23)$$

この問題の任意の位置(x,y)における全水頭 $\phi$ の理論解は次式で表される。

$$\phi = \frac{1}{4\pi k} \sum_{m=0}^{n-1} Q_m \left[ \frac{(x - ma)^2 + (y - d)^2}{(x - ma)^2 + (y + d)^2} \right] + \hat{\phi}_B \quad (2.3-24)$$

また，1孔あたりの流量 $Q_m$ は帯水層厚さ $D$ を用いて次のように導かれる。

単孔問題 ( $n=1$ ) の場合,

$$Q_0 = \frac{2\pi k D (\hat{\phi}_B - \hat{\phi}_w)}{\ln(2d / r_w)} \quad \text{ただし, } d \gg r_w \quad (2.3-25)$$

二孔問題 ( $n=2$ ) の場合,

$$Q_0 = Q_1 = \frac{2\pi k D (\hat{\phi}_B - \hat{\phi}_w)}{\ln \frac{2d}{r_w} + \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{4d^2}{a^2} \right)} \quad \text{ただし, } d \gg r_w, 2d \geq a \quad (2.3-26)$$

無限配列孔問題 ( $n=\infty$ ) の場合,

$$Q_m = \frac{2\pi k D (\hat{\phi}_B - \hat{\phi}_w)}{\ln \left( a e^{\frac{2\pi d}{a}} / 2\pi r_w \right)} \quad \text{ただし, } d \gg r_w, 2d \geq a \quad (2.3-27)$$

### 2.3.4 三次元球状流問題

図 2.3-6 は被圧帯水層中にある単一の揚水（注水）点による三次元球状流を表す。

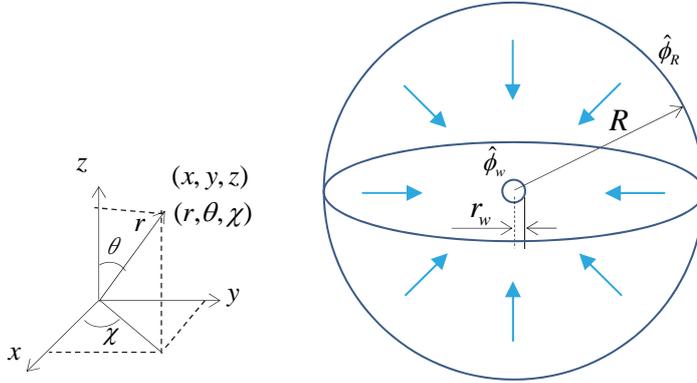


図 2.3-6 単一の揚水点による三次元球状流問題

支配方程式である式(2.2-1)は以下のように書き直すことができる。

$$k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.3-28)$$

ここに、未知関数  $\phi$  は全水頭、 $k$  は透水係数である。

式(2.3-28)は直交座標系  $(x, y, z)$  を用いているが、単揚水点により生じる三次元球状流は図 2.3-6 に示すように球座標系  $(r, \theta, \chi)$  を用いて表す。直交座標系  $(x, y, z)$  と球座標系  $(r, \theta, \chi)$  には次式の関係がある。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \chi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (2.3-29)$$

$$x = r \sin \theta \cos \chi, \quad y = r \sin \theta \sin \chi, \quad z = r \cos \theta \quad (2.3-30)$$

$$v_r = -k \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v_\theta = k \frac{-1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad v_\chi = -k \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \chi} \quad (2.3-31)$$

$$k\nabla^2\phi = k\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + k\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + k\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\chi^2} = 0 \quad (2.3-32)$$

図 2.3-6 の三次元球状流であるため、式(2.3-32)は以下のように書き直せる。

$$k\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0 \quad (2.3-33)$$

式(2.3-33)を積分すると次の式が得られる。

$$r^2\frac{\partial\phi}{\partial r} = \text{const.} = c_1 \quad (2.3-34)$$

$$\phi = -\frac{c_1}{r} + c_2 \quad (2.3-35)$$

ここで、図 2.3-6 の三次元球状流は次の条件で表される。

$$\phi = \hat{\phi}_w \quad \text{on } r=r_w, \quad \phi = \hat{\phi}_R \quad \text{on } r=R \quad (2.3-36)$$

式(2.3-9)に式(2.3-10)を代入し、既知量を添え字<sup>^</sup>で表すと、 $c_1$ および $c_2$ に関する二つの式を得る。

$$\hat{\phi}_w = -\frac{c_1}{r_w} + c_2 \quad (2.3-37)$$

$$\hat{\phi}_R = -\frac{c_1}{R} + c_2 \quad (2.3-38)$$

これより次式が得られる。

$$\phi = \frac{\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w}{\frac{1}{R} - \frac{1}{r_w}} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_w} \right) + \hat{\phi}_w \quad (2.3-39)$$

$$v_r = -k \frac{\partial \phi}{\partial r} = -k \frac{\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w}{\frac{1}{R} - \frac{1}{r_w}} \frac{1}{r^2} \quad (2.3-40)$$

最終的に，揚水点の流量は次式で与えられる．

$$Q = -\int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta v_r d\theta = \frac{4\pi k (\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w)}{\frac{1}{R} - \frac{1}{r_w}} \frac{1}{r^2} \quad (2.3-41)$$

$\phi$ は $Q$ を用いて次式に書き直せる．

$$\phi = \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r} \right) + \hat{\phi}_w \quad (2.3-42)$$

## 2.4 点源を用いた注水／揚水孔のモデル化における問題

1.1 で述べたとおり，有限要素法（FEM）による浸透流解析において，他の構造物や解析領域の大きさに比べて非常に小さな径の注水孔や井戸などのモデル化が重要になる場合がある．しかし，大規模地下構造物を対象とした浸透流解析モデルの構築時には，構造物や解析領域の大きさと比較して非常に小さい径の注水／揚水孔の扱いがしばしば問題となる．孔を実寸法でモデル化しようとする，メッシュ分割に多大な労力を要するだけでなく，実務上，非現実的な規模になるためである．そこで，孔径の大きさを無視して，節点群からなる点源の連なりとしてモデル化されることが多い．

しかし，このようなモデル化では，点源は要素または格子サイズに依存するある径を有する孔として近似されることになる．本論文では次節で詳述するように，これを半径で表し‘相当半径（Virtual radius）’と呼ぶ．この相当半径と孔の実寸法との乖離が大きいほど，点源の流量や点源周辺の水頭分布の解析精度が低下することに関して，様々な研究報告がされているのは 1.3.1 で述べたとおりである．

点源による注水／揚水孔のモデル化については Kono による研究があるが<sup>9)</sup>，Kono が提唱する保持すべき要素サイズの式に基づく試算をした場合でも，大規模地下構造物を対象とした浸透流解析モデルは実務上，非現実的な規模となることもある．上村らが Kono の理論を発展させ，四角形要素に対する相当半径を示し，点源となる節点に与える水位を要素サイズに応じて補正することを提唱しているが<sup>35), 36), 37)</sup>，孔先端部の点源における水位補正はこの方法の特性から困難であると推察される．また，Chen & Zhang は保持すべき相当半径を体系的に整理し，メッシュを局所的に細分化する効果を示したが<sup>38)</sup>，節点の大幅な増加を伴う．

このように，広域を対象とした浸透流解析において，注水／揚水孔を取り扱う場合，孔を実径でメッシュ分割することは解析メッシュ作成作業が非常に困難となり，解析モデルの規模も実務で用いるには現実的なものでなくなることがある．また，点源を用いて孔をモデル化する方法も，モデル規模や解析精度の観点から実用上の課題が残っており，特に三次元的なモデル化を行う際には，確立された手法が見当たらないのが現状である．

## 2.5 点源要素透水係数補正式によるモデル化

前節で述べた注水／揚水孔のモデル化における問題を解決するため、本研究では簡便かつ効果的な点源を用いた新しい孔のモデル化を提案する。提案するモデル化を以下に詳述する。

### 2.5.1 二次元三角形一次要素を用いたモデル化の補正式

図 2.5-1に示す水平で均質な被圧帯水層中の単一の孔から、地下水を一定量揚水（注水）する二次元放射状流の問題は次の浸透流方程式と境界条件式で表される。

$$k\nabla^2\phi=0 \quad \text{in } V \quad (2.5-1)$$

$$\phi=\hat{\phi}_w \quad \text{on } r=r_w, \quad \phi=\hat{\phi}_R \quad \text{on } r=R \quad (2.5-2)$$

ここに、未知関数 $\phi$ は全水頭、 $k$ は透水係数、 $r_w$ は揚水孔の半径、 $\hat{\phi}$ は未知関数の既知量を表し、 $\hat{\phi}_w$ は揚水孔での全水頭、 $\hat{\phi}_R$ は解析領域外縁の全水頭である。

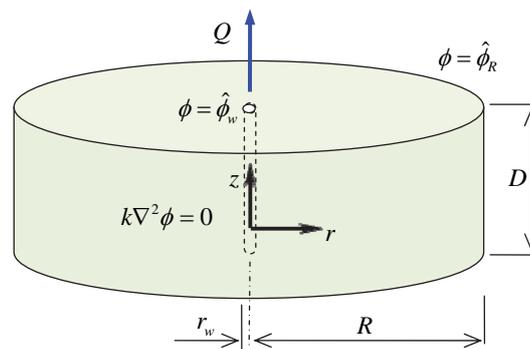


図 2.5-1 被圧帯水層中の二次元放射状流

この問題の理論解は、2.3.1で述べたように、帯水層厚さ $D$ を用いて次式で表される<sup>47)</sup>。

$$Q = \frac{2\pi kD(\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w)}{\ln(R/r_w)} \quad (2.5-3)$$

$$\phi = \frac{Q}{2\pi kD} \cdot \ln(r/r_w) + \hat{\phi}_w \quad (2.5-4)$$

ここに、 $Q$ は揚水孔からの流量である。

この問題に対して、図 2.5-2 に示すように、揚水孔を節点における点源として表し、点源を囲む  $n$  等分された三角形一次要素群を用いてモデル化することを考える。点源と点源周りの節点を結ぶ辺の長さ  $r_e$  がすべて等しいとし、点源周りの全水頭を  $\phi_s$  として表すと、点源となる節点に集まる流量  $\tilde{Q}$  はこれら要素群で離散化した有限要素方程式から次のようになる。

$$\tilde{Q} = \alpha kD(\phi_s - \hat{\phi}_w) \quad (2.5-5)$$

$$\alpha = n \cdot \left( \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \quad (2.5-6)$$

$$n = \frac{2\pi}{\theta} \quad (2.5-7)$$

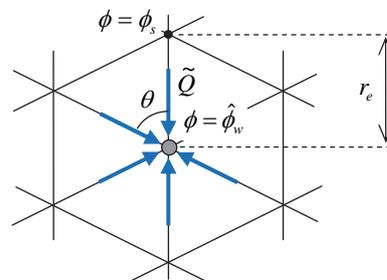


図 2.5-2 点源周りの三角形一次要素群

ここで、式(2.5-3)の距離  $R$  の代わりに要素サイズ  $r_e$  を用いて、式(2.5-3)の  $Q$  と式(2.5-5)の  $\tilde{Q}$  が等しいとおくと次式を得る<sup>9)</sup>。

$$\tilde{r}_w = r_e \cdot \exp\left(-\frac{2\pi}{\alpha}\right) \quad (2.5-8)$$

ここに、式(2.5-8)の  $\tilde{r}_w$  は三角形一次要素を用い、揚水孔を点源としてモデル化した場合の孔の半径に相当し、本研究ではこれを相当半径と呼ぶ。式(2.5-5)右辺の  $\alpha$  は、式(2.5-6)、式(2.5-7)に示すように円周方向の分割数で決まり、分割を細かくすると  $\pi$  に収束するので、円周方向にどんなに細かく分割しても、式(2.5-8)右辺の指数関数値は 1/7 程度である。相当半径  $\tilde{r}_w$  が真の揚水孔の半径  $r_w$  と等しくなるようにするには、点源を囲む要素のサイズ  $r_e$  を実半径の 7 倍程度の大きさにする必要がある。例えば、点源としてモデル化する揚水孔の実孔径が 0.1m (実半径 0.05m) の場合、要素サイズ約 0.4m のメッシュを設けることが必要となる。数百 m～数十 km の領域を対象とする広域の浸透流解析モデル内に、部分的にとは言え約 0.4m のメッシュを設けることは、節点・要素数の制限などから簡単ではない。結果、点源の相当半径が過大となるようなメッシュ分割になり、揚水孔近傍の解析精度は低下する。

この問題に対して、本研究では、点源となる節点を囲む要素の透水性を補正することによって相当半径を修正することを提案する。式(2.5-5)において点源を囲む要素の透水係数を  $\tilde{k}$  とし、式(2.5-3)の  $Q$  と式(2.5-5)の  $\tilde{Q}$  が等しいとおくと、次式が得られる。

$$\frac{\tilde{k}}{k} = \frac{2\pi}{\alpha \cdot \ln(r_e/r_w)} \quad (2.5-9)$$

すなわち、式(2.5-9)により  $n$  と  $r_e$  に応じて  $\tilde{k}$  を定めれば、点源の相当半径  $\tilde{r}_w$  を揚水孔の実半径  $r_w$  と等価にすることができる。

## 2.5.2 二次元四角形一次要素を用いたモデル化の補正式

四角形一次要素を用いた場合の点源のモデル化についても、前項2.5.1と同様に補正式を導出することができる。図 2.5-1に示す水平で均質な被圧帯水層中の単一の孔から地下水を一定量揚水（注水）する二次元放射状流の問題を考える。この問題に対して、図 2.5-3に示すように、揚水孔を節点における点源として表し、点源を囲む4等分された正方形の四角形一次要素群を用いてモデル化する。点源と点源周りの節点を結ぶ辺の長さを  $r_e$  とし、点源周りの全水頭を  $\phi_s$  として表すと、点源となる節点に集まる流量  $\tilde{Q}$  はこれら要素群で離散化した有限要素方程式から次のようになる。

$$\tilde{Q} = \frac{8}{\left(3 - \frac{\ln(2)}{\pi}\right)} (kD(\phi_s - \hat{\phi}_w)) \quad (2.5-10)$$

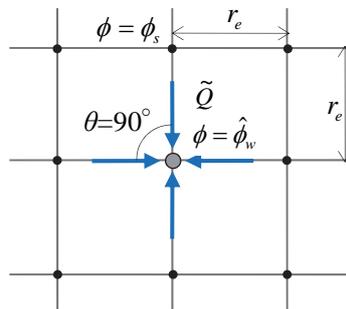


図 2.5-3 点源周りの四角形一次要素群

ここで、式(2.5-3)の距離  $R$  の代わりに要素サイズ  $r_e$  を用いて、式(2.5-3)の  $Q$  と式(2.5-10)の  $\tilde{Q}$  が等しいとおくと次式を得る<sup>38)</sup>。

$$\tilde{r}_w = 2^{1/4} e^{-3\pi/4} r_e \quad (2.5-11)$$

ここに、式(2.5-11)の  $\tilde{r}_w$  は四角形一次要素を用い、揚水孔を点源としてモデル化した場合

の孔の半径に相当する相当半径である。本来であれば、この相当半径 $\tilde{r}_w$ と真の揚水孔半径 $r_w$ とが等しくなるように、点源を囲む要素のサイズ $r_e$ を設定する必要がある。しかし、前項でも述べたように、実務では節点・要素数の制限などから、 $r_e$ は式(2.5-11)を満足するように十分小さくできない場合が多い。

この問題に対して本研究では、点源となる節点を囲む要素の透水性を補正することによって相当半径を修正することを提案する。式(2.5-5)において点源を囲む要素の透水係数を $\tilde{k}$ として、式(2.5-3)の $Q$ と式(2.5-10)の $\tilde{Q}$ が等しいとおくと、次式が得られる。

$$\frac{\tilde{k}}{k} = \frac{(3\pi - \ln(2))}{4 \ln(r_e/r_w)} \quad (2.5-12)$$

すなわち、式(2.5-9)により $r_e$ に応じて $\tilde{k}$ を定めれば、点源の相当半径 $\tilde{r}_w$ を揚水孔の実半径 $r_w$ と等価にすることができる。

### 2.5.3 三次元四面体一次要素を用いたモデル化の補正式

注水／揚水孔や井戸の先端部で生じる三次元球状流問題についても，二次元放射流問題と同様に点源の相当半径を考えることができる．図 2.5-4に示す均質な被圧帯水層中のある一点から，地下水を一定量揚水（注水）する三次元球状流の問題は，式(2.5-1)の浸透流方程式と式(2.5-2)の境界条件式で表される．

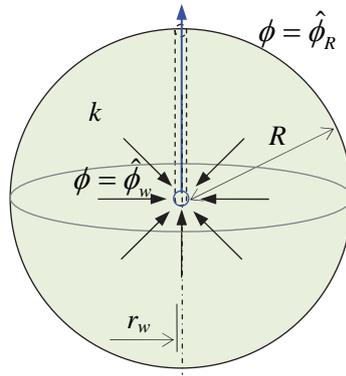


図 2.5-4 被圧帯水層中の三次元球状流

この問題の理論解は2.3.4で述べたとおり，次式で表される<sup>47)</sup>．

$$Q = \frac{4\pi k(\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w)}{\frac{1}{r_w} - \frac{1}{R}} \quad (2.5-13)$$

$$\phi = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r} \right) + \hat{\phi}_w \quad (2.5-14)$$

この問題に対して，図 2.5-2 に示すように，揚水孔を節点における点源として表し，点源を囲む8等分された四面体一次要素群を用いてモデル化することを考える．点源と点源周りの節点を結ぶ辺の長さ $r_e$ がすべて等しいとし，点源周りの全水頭を $\phi_s$ として表すと，点源となる節点に集まる流量 $\tilde{Q}$ はこれら要素群で離散化した有限要素方程式から次のよ

うになる。

$$\tilde{Q} = 4kr_e(\phi_s - \hat{\phi}_w) \quad (2.5-15)$$

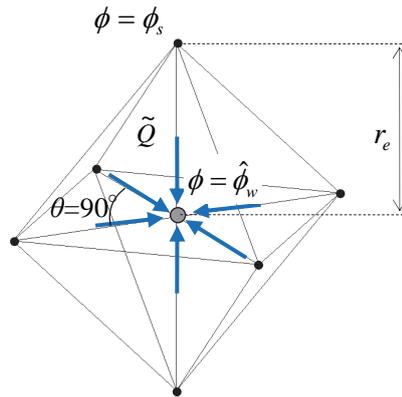


図 2.5-5 点源周りの四面体一次要素群

ここで、式(2.5-13)の距離  $R$  の代わりに要素サイズ  $r_e$  を用いて、式(2.5-13)の  $Q$  と式(2.5-15)の  $\tilde{Q}$  が等しいとおくと次式を得る。

$$\tilde{r}_w = \frac{r_e}{\pi+1} \quad (2.5-16)$$

ここに、式(2.5-16)の  $\tilde{r}_w$  は四面体一次要素を用い、揚水点を点源としてモデル化した場合の孔の半径に相当する相当半径である。本来であれば、この相当半径  $\tilde{r}_w$  と真の揚水孔半径  $r_w$  とが等しくなるように、点源を囲む要素のサイズ  $r_e$  を設定する必要がある。しかし、前項でも述べたように、実務では節点・要素数の制限などから、 $r_e$  は式(2.5-16)を満足するように十分小さくできない場合が多い。

この問題に対して本研究では、点源となる節点を囲む要素の透水性を補正することによ

って相当半径を修正することを提案する. 式(2.5-13)において点源を囲む要素の透水係数を $\tilde{k}$ として, 式(2.5-13)の $Q$ と式(2.5-15)の $\tilde{Q}$ が等しいとおくと, 次式が得られる.

$$\frac{\tilde{k}}{k} = \frac{\pi}{\frac{r_e}{r_w} - 1} \quad (2.5-17)$$

すなわち, 三次元球状流問題に四面体要素を用いた場合, 式(2.5-17)により $\tilde{k}$ を定めることにより, 点源の相当半径 $\tilde{r}_w$ を揚水点の実半径 $r_w$ と等価にすることができる.

## 2.6 提案するモデル化の特徴

本研究が提案する点源を用いた注水／揚水孔のモデル化は、流量の理論解から導出した点源要素透水係数補正式を用いて、点源が有する相当半径を補正するものである。点源が属する要素の透水係数に、要素の形状に応じた補正係数を適用するだけなので、非常に簡便な手法である。節点数の増加もないため、計算負荷はほとんど増加しない。また、三次元問題への適用可能性もある。

孔のモデル化に関する最終的な目標は、1.1.1 で述べたような大規模構造物周辺の複雑な地下水流動場を対象とした浸透流解析における注水・揚水孔のモデル化の精度向上である。より複雑な地下水流動場への適用を視野に入れ、本研究では次章以降に示すコード検証および解検証により、提案する点源を用いたモデル化の有効性および有用性を評価する。

## 2.7 本章のまとめ

以下に本章の内容をまとめる.

- 本研究が提案するモデル化の概要について述べた.
- 本論文で扱う支配方程式および離散化方程式を示した.
- 注水／揚水孔に関する理論解を既往文献より整理して示した.
- 本研究で提案する点源を用いた注水／揚水孔のモデル化を示した.
- 提案するモデル化は, 点源を含む要素の透水係数を補正することにより, 要素サイズの影響を低減し, 解の精度を改善するものである.
- 二次元放射状流問題および三次元球状流問題の理論式から導出した補正式について, 対象とする問題と要素の種類ごとに詳説した.
- 提案するモデル化について特徴を示し, 本研究の独自性を明確にした.

## 第3章 コード検証

### 3.1 V&Vの観点からのコード検証

本章では、本研究で提案するモデル化について、ASME V&V10<sup>15), 21)</sup>に代表されるV&V (Verification & Validation : 検証と妥当性確認) の観点から、検証に位置付けられる評価を行う。1.3.2 で述べたように、検証は、解が精度良く正確に得られたかを評価するプロセスであり、妥当性確認は、実測値等との比較により、解析結果が予め定められた要件を満足するかを評価するプロセスである。検証はコード検証 (Code Verification) と解検証 (Solution Verification) の2段階に分けられる。コード検証では、微分方程式で表された数学モデルを数値解析手法で離散化し、計算機に実装した計算モデルを検証する。計算モデルにプログラミングミスなどの誤りがなく、計算機に正しく実装されていることの確認に加え、採用した数値アルゴリズムが所期の性能を発揮することを確認するプロセスでもある。したがって、一般的には、古典的な理論解等との比較による方法がとられる。一方、解検証では、時間・空間に関する離散化誤差や繰り返し計算の収束誤差などの定量的な推定により、誤差が妥当性確認の要件に対して十分小さいことを検証するプロセスである。解検証の結果は次章で述べる。

FEMを用いた広域の浸透流解析において、点源による注水/揚水孔のモデル化がしばしば行われるが、このモデル化に関するコード検証は省略されているのが現状である。しかし、ASME V&V10でも述べられているように、コード検証は、新しいコードを開発した際に開発者が行うだけでなく、商用コードを用いる際にユーザーも実施することが重要である。

ここでは、まず、前章で提案した点源要素透水係数補正式を用いるモデル化に誤りがないうことを確認するため、補正式を導出した、地盤が均質の二次元放射状流問題および三次元球状流問題を対象とした検証を行う。また、さらに、地盤が不均質な問題や、群孔問題、より実務に近いモデルとして、直線定圧境界が近傍にある群孔問題への補正式の適用性について述べる。また、水平に分布する複数の地層中の孔問題について、二次元と三次元のそれぞれ二つの補正式を併用した結果を報告する。

次に、コード検証で確認すべき重要な計算モデルの性能である、要素分割の細分化に伴う正解への収束性<sup>41),42)</sup>について検証する。点源を用いるモデル化について、本研究が提案するモデル化が妥当であることを明らかにし、従来手法のモデル性能に問題があることを示す。対象とする問題は、補正式を導出した理論解の二次元放射状流の単一孔問題での検証に加え、河川のような直線状の圧力規定境界の近傍に複数の注水／揚水孔が配置された群孔問題も対象とし、実務における V&V を想定したコード検証の試行結果を示す。同時に、補正のないモデル化や点源以外のモデル化についても同様のコード検証を行い、提案するモデル化の有効性も明示する。

### 3.2 二次元単一孔問題

#### 3.2.1 二次元三角形一次要素の補正式の精度検証

2.5.1で述べた浸透流方程式(2.5-1), 境界条件式(2.5-2)で表される図 2.5-1と同じ二次元放射状流の定常浸透流問題を対象として, 点源の相当半径を補正するために, 点源要素透水係数補正式(2.5-9)を用いた解析結果の検証を理論解との比較により行った. この問題と理論解<sup>47)</sup>を以下に再掲する.

$$Q = \frac{2\pi k D (\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w)}{\ln(R/r_w)} \quad (3.2-1)$$

$$\phi = \frac{Q}{2\pi k D} \cdot \ln(r/r_w) + \hat{\phi}_w \quad (3.2-2)$$

ここに,  $Q$ は揚水孔からの流量,  $D$ は帯水層厚さである.

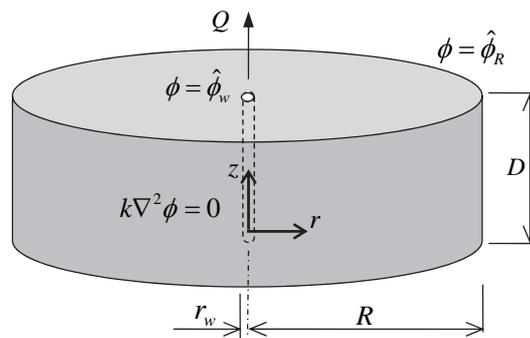


図 3.2-1 被圧帯水層中の二次元放射状流

### (1) 解析モデル

図 3.2-2は解析モデルである．点源を中心とした円形の領域を $\theta = \pi/12$  ( $\theta=15^\circ$ ) で等分割し，問題の軸対称性を考慮して一分割分を解析領域として6節点五面体一次要素（点源を含む要素のみ）と8節点六面体一次要素を用いてメッシュ分割した．解析モデルの奥行きは単位長さの1要素である．点源としてモデル化する注水孔の実半径 $r_w$ は0.05mとし，全水頭 $\hat{\phi}_w$ として100mを与えた．解析領域の範囲 $R$ は点源中心から60mとし，領域の境界に全水頭 $\hat{\phi}_R$ として0mを与えた．透水係数は補正值が分かりやすいように $1.0 \times 10^{-6}$ m/sとした．実際の構造物を含む広域を対象とした解析では，メモリー等の制約から，上記のように $\theta$ 方向を細かく分割することは難しい．しかし，本解析は軸対称問題の理論解との比較を目的としていることから，解析領域の近似誤差の影響を排除するために， $\theta$ 方向の分割を十分に細かく設定した．

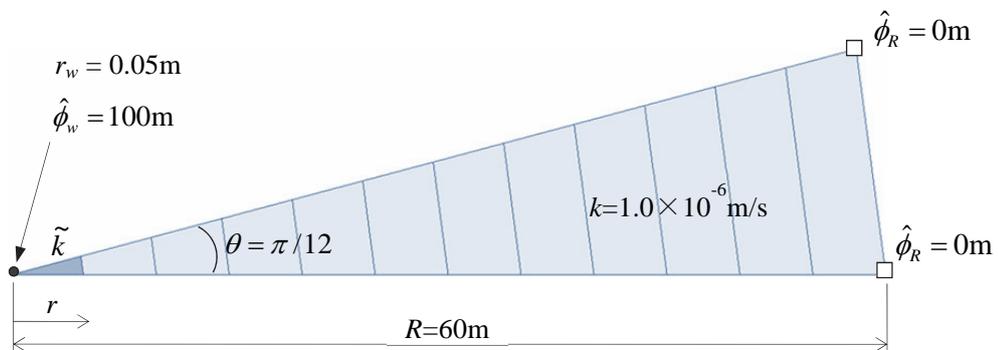


図 3.2-2 解析モデル（二次元放射状流問題，均質モデル）

## (2) 解析ケース

この問題に対し、 $r$ 方向の要素サイズ $r_e$ をパラメータとして、式(2.5-9)により点源の相当半径を補正した解析結果と理論解を比較するケーススタディを実施した。表 3.2-1に解析ケースを示す。提案するモデル化により、相当半径の補正を行ったケースでは、図 3.2-2において点源となる節点を有する濃い色で示した要素に、補正式(2.5-9)から求めた補正係数 $\tilde{k}/k$ を元の透水係数 $k=1.0 \times 10^{-6} \text{m/s}$ に乗じることによって透水係数を与えた。

表 3.2-1 解析ケース（二次元放射状流問題，均質モデル）

解析ケース	相当半径補正	要素サイズ $r_e$ (m)	点源要素透水係数の補正係数 $\tilde{k}/k$
1	補正なし	1	1.0
1r	補正あり	1	0.6638
2	補正なし	2	1.0
2r	補正あり	2	0.5391
5	補正なし	5	1.0
5r	補正あり	5	0.4318
10	補正なし	10	1.0
10r	補正あり	10	0.3753

## (3) 解析結果

図 3.2-3 は、式(3.2-1)の理論解 $Q_0$ に対する各ケースの点源流量 $Q$ の比である。解析モデルは点源を中心とした $\theta = \pi/12$ の領域のため、 $Q$ は注水孔の全水頭が規定される節点で算出される流量に式(2.5-7)から求められる $n$ を乗じて算出した。点源の相当半径の‘補正なし’のケースでは、要素サイズが大きいほど点源の相当半径と注水孔の実半径との乖離が大きくなるため、理論解との差が大きくなる。 $r_e$ を10mとした場合は理論解の約1.9倍の流量となった。一方、点源の相当半径の補正を行った‘補正あり’のケースは、要素サイズに因らずに理論解と良い一致を示した。

理論解および各ケースの解析値について $r$ 方向の全水頭 $\phi$ のプロファイルを図 3.2-4 に示す。理論解は式(3.2-2)により算出した。黄色い太線が理論解、塗りつぶしのマーカーは

点源の相当半径の‘補正なし’の解析結果，白抜き色のマーカーは‘補正あり’の解析結果である．マーカーの色は要素サイズごとに区分している．‘補正なし’のケースは，図 3.2-3 の流量の場合と同様に  $r_e$  が大きくなるのにしたがって，理論解との差は大きくなる．このモデルでは  $r_e$  を 10m とした場合，理論解との水頭差は 20m 以上となった．一方，‘補正あり’のケースでは要素サイズに関わらず理論解と良好な一致を示した．

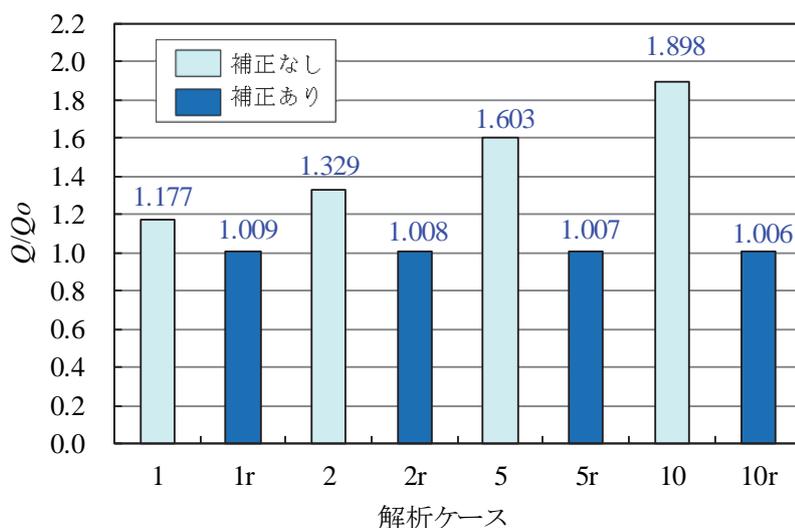


図 3.2-3 理論解  $Q_0$  に対する流量比の比較 (二次元放射状流, 均質モデル)

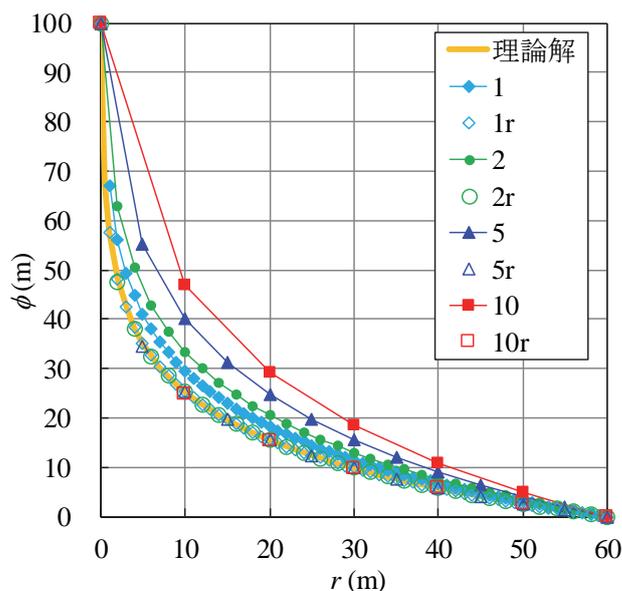


図 3.2-4 全水頭分布の比較 (二次元放射状流, 均質モデル)

#### (4) 補正式の精度の評価

補正式を導出した均質地盤の二次元の単一孔問題について数値実験を実施し、精度を確認した。相当半径の補正をしたモデル化は、流量、全水頭分布ともに理論解と良い一致を示し、大幅に精度が向上することを確認できた。不均質な地盤を対象とした問題に対する提案するモデル化の適用性については次項で述べる。

### 3.2.2 不均質地盤を対象とした二次元三角形一次要素の補正式の適用

補正式(2.5-9)は透水性が均質な被圧帯水層を対象とした理論解より求めているが、要素サイズに応じて点源の相当半径を補正するものであるため、透水性が不均質なモデルにも適用可能と考える。そこで、不均質な透水性分布のモデルを対象として、補正式(2.5-9)の適用性について数値実験による検証を行った。

#### (1) 解析モデル

図 3.2-5に解析モデルを示す。点源を中心とした円形の領域を $\theta = \pi/12$  ( $\theta=15^\circ$ ) で等分割し、二分割分の解析領域を6節点五面体一次要素（点源を含む要素のみ）と8節点六面体一次要素を用いてメッシュ分割した。解析モデルの奥行きは単位長さの1要素である。解析領域を四つの領域に分け、それぞれの領域に異なる透水性 $k_1 \sim k_4$ を設定した。点源としてモデル化する注水孔の実半径 $r_w$ を0.05mとし、全水頭 $\hat{\phi}_w$ として100mを設定した。影響領域 $R$ は注水孔の中心から60mとし、領域境界に全水頭 $\hat{\phi}_R$ として0mを与えた。

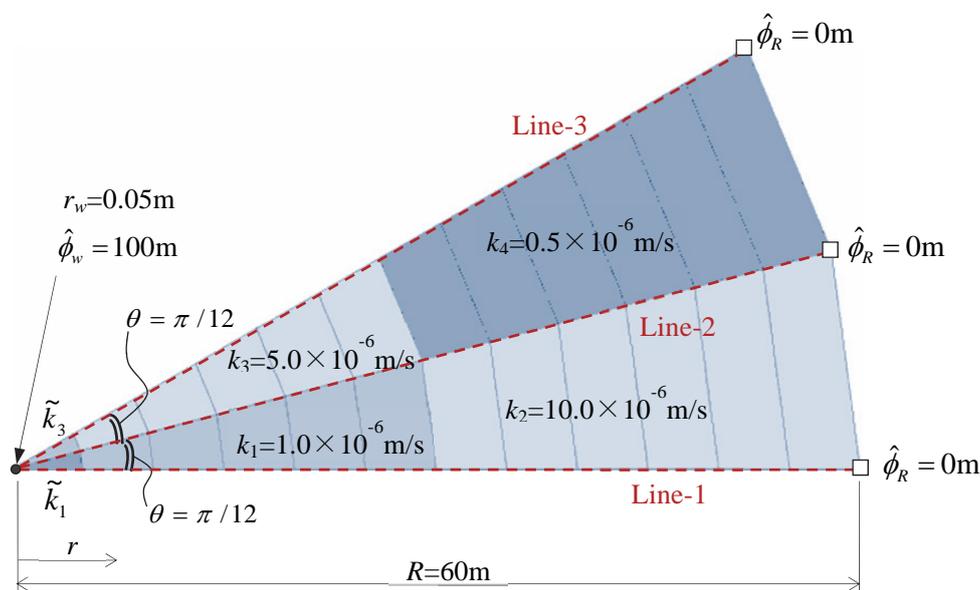


図 3.2-5 解析モデル（二次元放射状流問題，不均質モデル）

## (2) 解析ケース

均質モデルと同様に、解析領域の $r$ 方向の要素サイズ $r_e$ をパラメータとしてケーススタディを実施した。ここでは、注水孔を実サイズ0.05mでモデル化し、解析領域全体を0.05～0.1mの極小の要素で分割した解析結果を参照解として各ケースとの比較を行った。表3.2-2に解析ケースを示す。相当半径の補正を行う‘補正あり’のケースでは、補正式(2.5-9)から求めた補正係数 $\tilde{k}/k$ を元の透水係数 $k=1.0 \times 10^{-6} \text{m/s}$ に乘じることによって点源を含む要素の透水係数を与えた。

表 3.2-2 解析ケース（二次元放射状流問題，不均質モデル）

解析ケース	相当半径補正	要素サイズ $r_e$ (m)	点源要素透水係数の補正係数 $\tilde{k}/k$
参照解	補正なし (注水孔メッシュ分割)	0.05~0.1	1.0
1	補正なし	1	1.0
1r	補正あり	1	0.6638
2	補正なし	2	1.0
2r	補正あり	2	0.5391
5	補正なし	5	1.0
5r	補正あり	5	0.4318
10	補正なし	10	1.0
10r	補正あり	10	0.3753

## (3) 解析結果

図3.2-6は、参照解 $Q_r$ に対する各ケースの解析結果である点源流量 $Q$ の比である。点源の相当半径の‘補正なし’のケースは要素サイズが大きいほど参照解との差が大きくなり、‘補正あり’のケースは要素サイズに関わらず参照解と良い一致を示した。

図3.2-5に示す破線Line-1～Line-3における $r$ 方向の全水頭 $\phi$ の参照解および各ケースの

解析値のプロファイルを図 3.2-7に示す。黄色い太線が参照解，塗りつぶしのマーカーは‘補正なし’の解析結果，白抜きのマーカーは‘補正あり’の解析結果である。均質モデルの場合と同様に，‘補正なし’のケースは要素サイズが大きくなると参照解との乖離が大きくなる。一方で，‘補正あり’のケースは，要素サイズに関わらず参照解と良い一致を示し，解析領域内の不均質な透水性の変化による水頭変化傾向を良く捉えた。

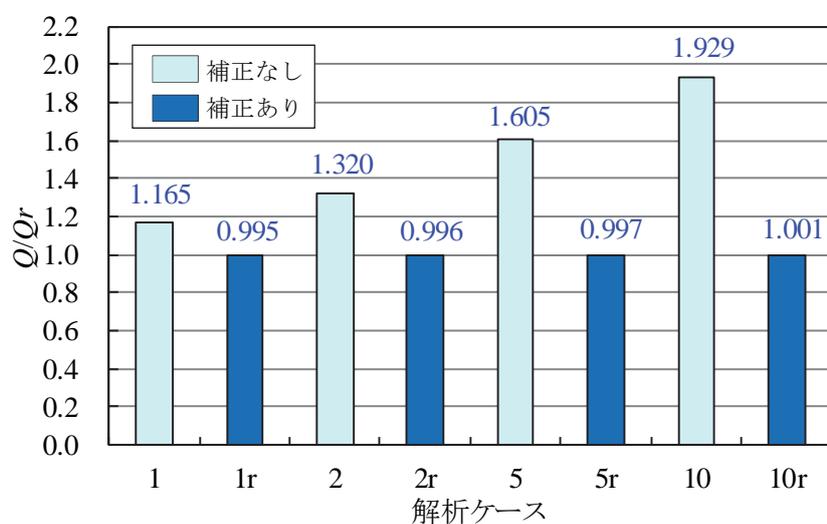
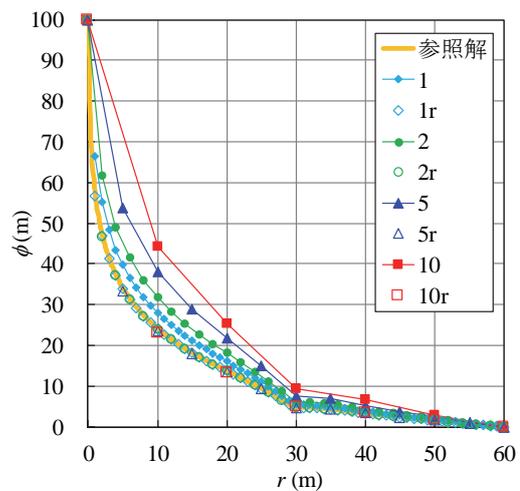
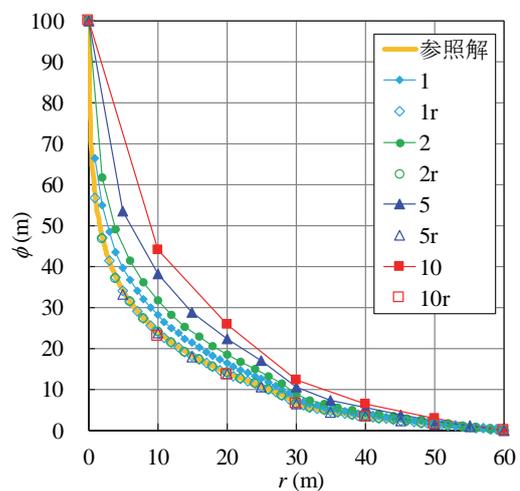


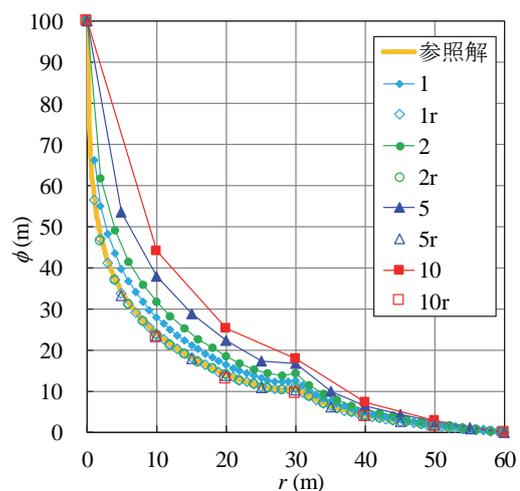
図 3.2-6 参照解  $Q_r$  に対する流量比の比較（二次元放射状流，不均質モデル）



(a) Line-1



(b) Line-2



(c) Line-3

図 3.2-7 全水頭分布の比較 (二次元放射状流, 不均質モデル)

#### (4) 補正式の適用性評価

本項の数値実験は不均質な地盤の二次元単一孔問題を対象とした検証であるが、均質な単一孔の理論解から誘導した点源要素透水係数補正式により相当半径を補正した結果、流量、全水頭分布ともに詳細メッシュによる参照解と良い一致を示し、大幅に精度が向上することを確認できた。点源の相当半径は要素サイズに依存し、補正式は要素サイズの影響を補正するものであるため、不均質な地盤に適用した場合においても大幅に精度が向上したと考えられる。

### 3.2.3 二次元四角形一次要素の補正式の精度検証

#### (1) 解析モデル

図 3.2-1 に示す二次元放射状流の定常浸透流問題を対象として、点源の相当半径を補正するモデル化を適用した FEM の解析結果と理論解との比較により検証を行った。図 3.2-8 は解析モデルである。問題の軸対称性を考慮して、点源を中心とした  $\theta = \pi/2$  ( $\theta=90^\circ$ ) の領域を、8 節点六面体一次要素を用いてメッシュ分割した。解析モデルの奥行きは単位長さの 1 要素である。点源の実半径  $r_w$  は 0.05m とし、全水頭  $\hat{\phi}_w$  として 100.0m を与えた。解析領域の範囲  $R$  は点源中心から 60m とし、領域の境界に全水頭  $\hat{\phi}_R$  として 0.0m を与えた。透水係数は補正値が分かりやすいように  $1.0 \times 10^{-6} \text{m/s}$  とした。

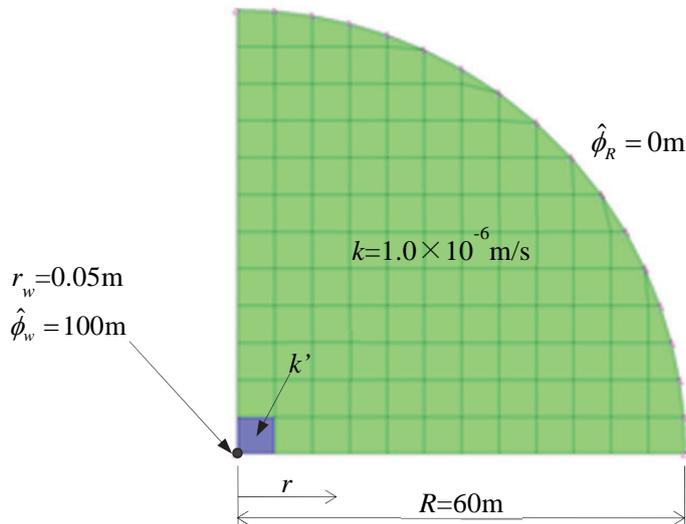


図 3.2-8 解析モデル（二次元放射状流問題，均質モデル）

#### (2) 解析ケース

解析領域を分割する要素サイズ  $r_e$  をパラメータとして、式(2.5-12)による点源の相当半径を補正した解析結果と理論解を比較するケーススタディを実施した。表 3.2-3 に解析ケースを示す。相当半径の補正を行ったケースでは、点源となる節点を有する一つの要素の透水係数に補正式(2.5-12)から求めた補正係数  $\tilde{k}/k$  を元の透水係数  $k=1.0 \times 10^{-6} \text{m/s}$  に乗じることによって与えた。

表 3.2-3 解析ケース（二次元放射状流問題，均質モデル）

解析 ケース	相当半径 補正	要素サイズ $r_e$ (m)	点源要素透水係数 の補正係数 $\tilde{k}/k$
1	補正なし	1	1.0
1r	補正あり	1	0.7287
2	補正なし	2	1.0
2r	補正あり	2	0.5918
5	補正なし	5	1.0
5r	補正あり	5	0.4740
10	補正なし	10	1.0
10r	補正あり	10	0.4120

### (3) 解析結果

図 3.2-9 は式(3.2-1)の理論解  $Q_0$  に対する各ケースの点源流量  $Q$  の比である。解析モデルは点源を中心とした  $\theta = \pi/2$  の領域のため、 $Q$  は注水孔の全水頭が規定される節点で算出される流量に式(2.5-7)から求められる  $n$  を乗じて算出した。点源の相当半径を補正しない結果は、要素サイズ  $r_e$  の増大に伴って点源の半径が過大評価されるため、理論解との差が大きくなる。 $r_e$  を 10m とした‘ケース 10’では理論解の約 1.8 倍の流量となった。点源の相当半径の補正を行った結果は、要素サイズに因らずに理論解と良い一致を示した。

理論解および FEM 解析結果の半径  $r$  方向の全水頭  $\phi$  のプロファイルを図 3.2-10 に示す。孔中心からの距離  $r$  における全水頭  $\phi$  の理論解は式(3.2-2)により算出した。薄い太線が理論解、黒のマーカ―は点源の相当半径の補正なしの解析結果、白抜きのマーカ―は点源の相当半径の補正を行った解析結果である。点源の相当半径を補正した結果は要素サイズに関わらず理論解と良好な一致を示した。

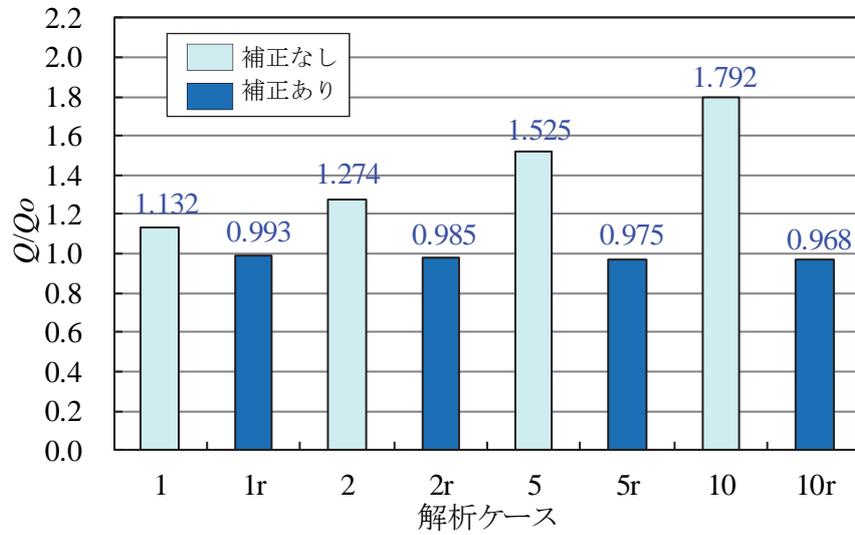


図 3.2-9 理論解  $Q_0$  に対する流量比の比較（二次元放射状流，均質モデル）

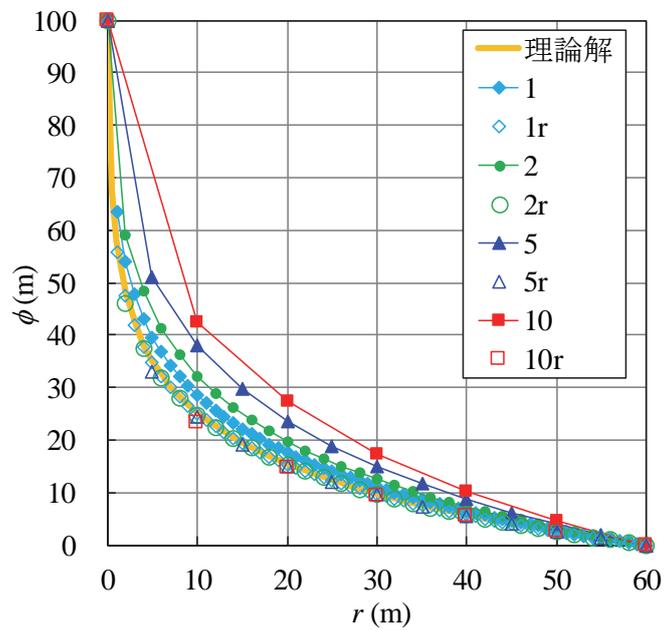


図 3.2-10 全水頭分布の比較（二次元放射状流，均質モデル）

#### (4) 補正式の精度の評価

二次元放射状流の理論解から導出した、四角形要素に関する点源要素透水係数補正式を用いて相当半径を補正した結果、流量、全水頭分布ともに理論解と良い一致を示し、大幅に精度が向上することを確認できた。相当半径を補正するモデル化は要素の種類に関わらず適用できる見通しを得た。三次元要素に関する補正式については 3.4 節にて述べる。

### 3.2.4 二次元単一孔問題におけるモデル性能の検証

2.5.1で述べた浸透流方程式(2.5-1), 境界条件式(2.5-2)で表される図 2.5-1の問題を対象とした要素分割の細分化に伴う収束性に関するコード検証の結果を示す. ここでも, 注水問題とし, 注水孔については, モデル化の違いが要素分割の細分化に伴う収束性および解の精度に与える影響についても検討するため, 4種の異なるモデル化で比較を行った.

#### (1) 解析モデル

図 3.2-11は解析モデルである. 現象の軸対称性を考慮し, 注水孔を中心とした扇形領域 ( $R = 60\text{m}$ ,  $\theta = \pi/12$ ) を6節点五面体一次要素 (点源を含む要素のみ) と8節点六面体一次要素を用いてメッシュ分割した.  $z$ 方向は単位長さの1要素である. 注水孔の実半径 $r_w$ は0.05mとし, 境界条件として全水頭 $\hat{\phi}_w = 100\text{m}$ ,  $\hat{\phi}_R = 0\text{m}$ を与えた. 透水係数は補正值が分かりやすいように $1.0 \times 10^{-6}\text{m/s}$ とした.

注水孔のモデル化は次の4種である. ①有孔モデル: 図 3.2-12(a)に示すように, 注水孔は点源ではなく実半径0.05mの孔が開いたモデルであり, 孔の壁面に相当する節点に注水孔の全水頭 $\hat{\phi}_w$ を与えた. その他は, 図 3.2-12(b)に示す注水孔を点源とした次の②~④のモデルである. ②等価点源モデル: 相当半径 $\tilde{r}_w$ が注水孔の実半径0.05mと等しくなるように点源周りの要素サイズを式(2.5-8)により設定したモデルである. 残りの二つは, 点源周りの要素分割による相当半径 $\tilde{r}_w$ が注水孔の実半径の3倍程度になるモデルである. ③補正点源モデル: 点源を含む要素の透水係数を式(2.5-9)で補正したモデル, ④未補正点源モデル: 点源を含む要素の透水係数を補正していないモデルである. 点源モデルでは, 注水孔を表す節点に全水頭 $\hat{\phi}_w$ を与えた.

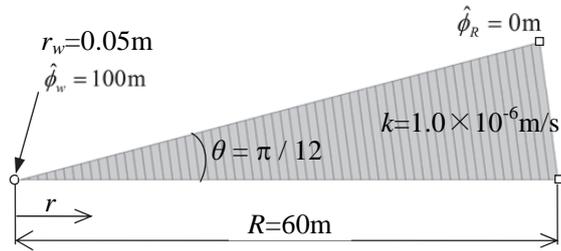
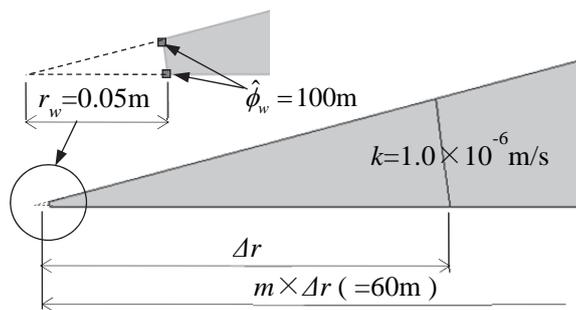
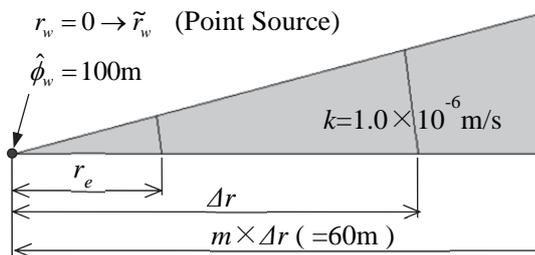


図 3.2-11 モデル化性能評価の解析モデル（二次元放射状流，均質モデル）



(a) 有孔モデル



(b) 点源モデル

$m$  : 分割数

図 3.2-12 モデル化性能評価の解析モデル（孔周辺拡大図）

(2) 解析ケース

4種のモデル化について、 $r$ 方向の要素サイズ $\Delta r$ を変化させた解析を実施した。表 3.2-4に解析ケースを示す。有孔モデルについては、 $r$ 方向の要素サイズ $\Delta r$ は、0.001~10mの7種の要素サイズとした。等価点源モデルは、点源要素の要素サイズ $r_e$ が孔の実半径と等価となるモデルであるが、その外側の領域の要素サイズ $\Delta r$ は $r_e$ と同じ場合に加え、1, 2, 5, 10mの5種のケースを設定した。補正点源モデルおよび未補正点源モデルは、点源の要素サイズ $r_e$ を1mとして、意図的に点源の相当半径が実半径と乖離するように設定した。点源を含む要素の外側の領域の要素サイズ $\Delta r$ は1, 2, 5, 10mの4種のケースを設定した。

表 3.2-4 モデル化の性能評価のための解析ケース（二次元放射状流問題，均質モデル）

解析モデル	点源要素サイズ $r_e$ (m)	点源外要素サイズ $\Delta r$ (m)	相当半径 $\tilde{r}_w$ (m)	点源要素透水係数の補正係数 $\tilde{k}/k$
有孔モデル	点源なし $r_w=0.05\text{m}$ の有孔モデル	0.001	点源なし	点源なし
		0.01		
		0.05		
		1		
		2		
		5		
		10		
等価点源モデル	0.36525	0.36525	0.05 $= r_w$	1.0
	0.36525	1.0		1.0
	0.36525	2.0		1.0
	0.36525	5.0		1.0
	0.36525	10.0		1.0
補正点源モデル	1	1	0.13689 $\neq r_w$	0.66380
	1	2		0.66380
	1	5		0.66380
	1	10		0.66380
未補正点源モデル	1	1	0.13689 $\neq r_w$	1.0
	1	2		1.0
	1	5		1.0
	1	10		1.0

### (3) 誤差指標

検証は、注水孔の全水頭 $\phi$ および流量 $Q$ に着目して実施した。全水頭の誤差指標 $E_\phi$ については、次の相対誤差ノルムを用いた。

$$E_\phi = \sqrt{\sum_{I \in \tilde{\mathbf{N}}} (\phi_I - \phi_I^{\text{reference}})^2} / \sqrt{\sum_{I \in \tilde{\mathbf{N}}} (\phi_I^{\text{reference}})^2} \quad (3.2-3)$$

ここに、 $\phi_I^{\text{reference}}$ は式(2.5-4)の理論解、 $\phi_I$ はFEMの解である。 $\tilde{\mathbf{N}}$ は評価対象となる節点集合であり、注水孔位置と解析領域の外周上において全水頭が規定される節点を除く、解析領域内の全節点を対象とした。

流量の誤差指標 $E_Q$ は、次式に示すとおり、注水孔位置で全水頭が規定される節点で算出される流量に式(2.5-7)から求められる $n$ を乗じた流量と、式(2.5-3)の理論解の相対誤差とした。

$$E_Q = \left| n \left( \sum_{I \in \tilde{\mathbf{N}}} Q_I \right) - Q^{\text{reference}} \right| / Q^{\text{reference}} \quad (3.2-4)$$

ここに、 $Q^{\text{reference}}$ は理論解、 $Q_I$ はFEMの解である。 $\tilde{\mathbf{N}}$ は注水孔位置の節点集合であり、点源モデルでは $\tilde{\mathbf{N}}=2$ である。

#### (4) 検証結果

4種のモデル化における二つの誤差指標の関係を図 3.2-13と図 3.2-14に示す。両図において、横軸は解析領域の $r$ 方向の要素サイズ $\Delta r$ ，縦軸は式(3.2-3)と式(3.2-4)の誤差指標である。

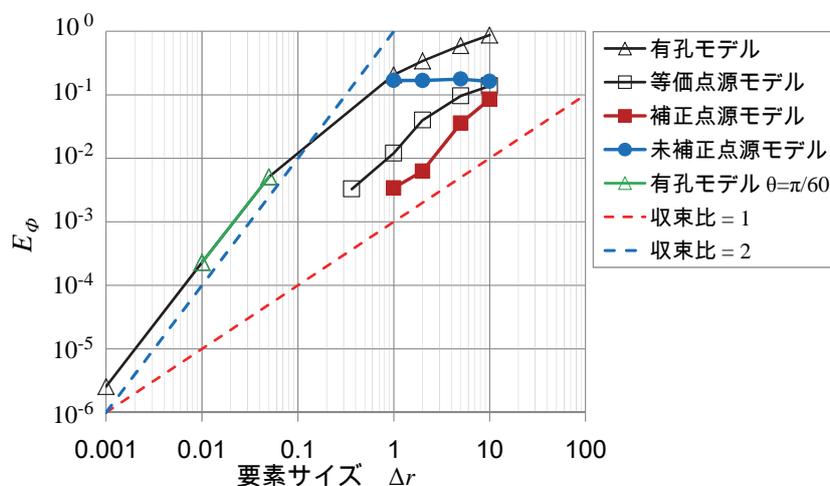


図 3.2-13 理論解に対する誤差（全水頭）

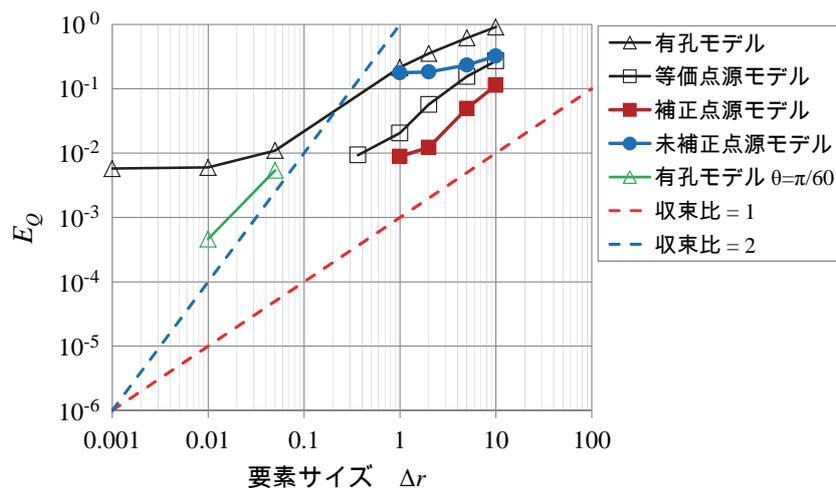


図 3.2-14 理論解に対する誤差（流量）

### (i) 各モデルの要素分割の細分化に伴う収束性

まずは、収束性の定量値である収束比 (Convergence rate) <sup>41), 42)</sup>を用いて、各モデルの特性を論ずる。ここでの収束比は、要素サイズの変化に対する誤差の変化について、両者を対数スケールで表したときの傾きであり、収束比 $p$ は、要素サイズを10倍にしたときに誤差指標が $10^p$ 倍となることを意味する。ここで、 $j$ 次要素 ( $j$ 次の多項式近似による有限要素)の最良近似において理論的に期待される収束比は、有限要素解である関数値とその一階微分を併せた $H^1$ 誤差ノルムで評価すると  $j$  となり、式(3.2-3)のように関数値のみで算出する $L^2$ 誤差ノルムで評価すると  $j+1$  となる<sup>43), 44)</sup>。本論文では一次要素を用いているため、有限要素解そのものである全水頭の誤差 (式(3.2-3)の $L^2$ 誤差ノルム) の収束比は2程度となるといえる。

両図から観測される収束比を、赤と青の破線で示した収束比1および2の参照線と比較する。図 3.2-13より、有孔モデル、等価点源モデル、補正点源モデルについては、 $E_\phi$ は2程度となり、理論通りの収束比となった。これにより、点源モデルにおいてもモデル化を適切に行った場合は、相応の収束性が得られることが確認できた。一方、未補正点源モデルでは、明確な収束性すら観測されなかった。点源の相当半径が実半径と等しくなるような分割、または、適切な補正を行わないと、要素分割の細分化に伴う収束性が保証されないということが示された。

また、図 3.2-14の $E_Q$ についても図 3.2-13の $E_\phi$ と同程度の収束比となることが確認できたが、有孔モデルでは、要素サイズが0.05m以下の場合、 $E_Q$ と $E_\phi$ の収束比に大きな違いが生じた。有限要素の近似誤差は、 $r$ 方向のメッシュ細分化によって小さくなっていくが、流量については、解析領域の大きさと形状に強く依存し、真の扇形領域との乖離が $r$ 方向のメッシュ細分化に依存しないためと考えられる。確認のため、解析領域の円周方向の分割角度を $\theta = \pi/30$ とした有孔モデルについても解析を行った。結果は両図における緑色の△のプロットである。 $E_Q$ と $E_\phi$ の収束比はともに概ね2程度となり、図 3.2-14の $E_Q$ の結果は改善されていることが分かる。図 3.2-13の $E_\phi$ については、黒と緑の△は紙面上では完全に重なっており、有意な差はなかった。

## (ii) モデル化の違いによる正確さの比較

図 3.2-13 と図 3.2-14 において、各モデルの解の精度を比較すると、要素サイズが 1m 以上の場合、点源モデルの方が有孔モデルより精度が良いが、これは孔直近の近似精度の影響であると考えられる。有孔モデルは孔の壁面から  $4r$  で分割しているが、三つの点源モデルは、 $4r$  に依らず、有孔モデルより孔に近い位置に必ず節点を有する。さらに、等価点源モデルと補正点源モデルによる近似は、理論解に基づいており、等価点源モデルでは点源から 0.36525m、補正点源モデルでは 1m までの間が、高精度な近似になっているものと考えられる。有孔モデルにおいてもさらに要素サイズを小さくすることにより、解が改善されることは、図 3.2-13 と図 3.2-14 の  $4r$  が 1m 以下の結果に示すとおりである。

### 3.2.5 二次元単一孔問題に関するまとめ

FEM を用いた浸透流解析において、解析モデル規模の制約から注水孔などを節点における点源として取り扱う場合の解析精度改善を目的として導出した、点源要素透水係数補正式を用いるモデル化について、V&V の観点からのコード検証を行った。本来であれば Kono が述べているように点源の相当半径が孔の実半径と等価となるようにメッシュ分割を行う必要があるが<sup>9)</sup>、本研究が提案する点源要素透水係数補正式を用いることにより相当半径が補正され、単一孔問題については要素サイズの影響を大幅に低減することが可能となる。

本節では、均質な被圧帯水層の問題を対象とした提案するモデル化の検証だけでなく、より現実的な不均質な地層分布を想定した問題への適用性に関する数値実験の結果も示した。得られた知見を以下に列挙する。

- a. 二次元放射状流の単一孔問題において、点源の相当半径を補正しない従来のモデル化に比べ、補正式を適用した場合は点源周辺の要素サイズに依らず非常に高い精度の解を与える。
- b. より現実的な不均質な透水性の地層分布の解析モデルにおいても、提案するモデル化は、不均質な透水性の変化による地下水流動場の特徴を的確に捉えた精度の良い解析結果を得ることができる。

また、単一孔問題を対象として、数値実験により得られた要素分割の細分化に伴う収束性および解の精度に着目したモデル性能の検証も実施した。検証では、注水孔を点源で表した3種のモデル化に加えて、点源を用いずに孔を実寸法でメッシュ分割するモデル化の計4種について、計算モデルの性能を比較した。点源を用いたモデルの性能を評価するため、点源の要素サイズは一定とした数値実験を実施した。得られた知見を以下に列挙する。

- c. 点源の相当半径が孔の実半径と等価になるように点源の要素サイズを設定した等価点源モデルと、本研究が提案する補正点源モデルは、未補正点源モデルより、流量、全水頭ともに精度の良い解を与える。

- d. 等価点源モデルと補正点源モデルは、全水頭の収束比については理論的に期待される収束性を示すが、未補正点源モデルは、明確な収束性は観測されない。
- e. 有孔モデルを用いて、等価点源モデルや補正点源モデルと同等の解析精度を得るためには、孔壁の極近傍を十分細かくメッシュ分割する必要がある。

V&Vの観点からのコード検証は、FEMやFDMによる新たなコード開発を行う際だけでなく、商用コードのように信頼性が高いものを使用する場合にも重要である。本節では、点源を用いる注水／揚水孔のモデル化について、従来手法の問題点と、それに対する本研究が提案する手法が妥当であることを、コード検証により明らかにした。また、注水／揚水孔を実径でメッシュ分割したモデル化において、要素サイズが十分小さいか否かを、コード検証における収束比の傾きにより確認できることも明示した。

本論文の数値実験で得た解の収束比は、地盤の透水性を均質とした条件下、また、対象とした動水勾配の条件下での結果であり、本論文で扱ったモデル化を実務に適用する際には、対象とする問題ごとにコード検証を実施する必要がある。実務で取り扱う問題では、理論解などの厳密解が存在することは稀であるため、対象とする問題にできるだけ近い理論解の問題に対してコード検証を実施することが重要である。近年では創成解 (Manufactured Solutions)<sup>39)</sup>と呼ばれる、創り出した解を用いる方法も注目されており、創成解を用いた検証も有力な手段として考えられる。

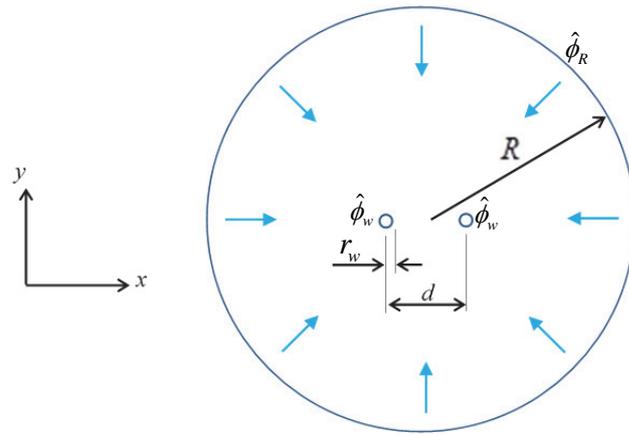
### 3.3 二次元群孔問題

本節では，単一の孔による二次元放射状流問題の理論解から誘導した補正式を用いるモデル化を群孔問題へ適用した場合の評価結果について述べる．

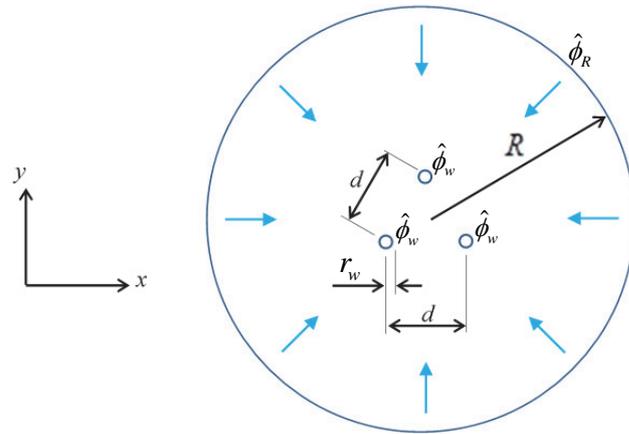
#### 3.3.1 円形解析領域の群孔問題への適用

##### (1) 群孔モデルの理論解

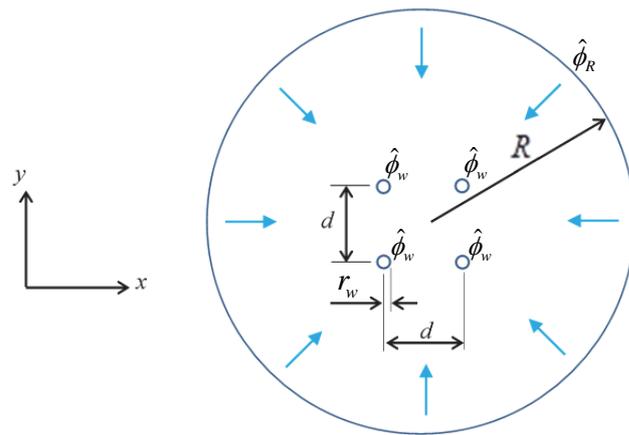
図 3.3-1 に示す孔本数  $N$  が 2 本～4 本の群孔のモデルについて，式(2.5-9)で示した点源要素透水係数補正式の適用を試みる．基本ケースとなる，地山の透水性を均一と仮定した均質モデルでの適用性の検証は，式(2.5-9)を適用した FEM の解析結果と群孔の理論解とを比較することにより行う．孔本数  $N$  が 2 本～4 本の群孔のモデルにおける孔一本当たりの流量の理論解は 2.3.2 で述べたとおり，孔本数  $N=2$  の場合は式(2.3-19)，孔本数  $N=3$  の場合は式(2.3-20)，孔本数  $N=4$  の場合は式(2.3-21)で与えられる<sup>47)</sup>．



(a) 孔数  $N=2$  モデル



(b) 孔数  $N=3$  モデル



(c) 孔数  $N=4$  モデル

図 3.3-1 円形解析領域にある群孔問題

## (2) 解析モデル

孔本数  $N$  が 2 本～4 本の群孔モデルにおける飽和定常浸透流問題を対象とし、表 3.3-1 に解析モデルの諸元を示す。孔は解析領域の中心から 10m 離れた位置に等間隔  $d$  で配置するものとした。解析領域の要素分割は領域端部を除き、同じサイズの 6 節点五面体一次要素により一様に行った。図 3.3-2 に点源周辺の要素分割について示す。  $N=2$  および  $N=4$  のモデルは点源周りを  $\theta = \pi/2$  ( $\theta=90^\circ$ ),  $N=3$  のモデルは  $\theta = \pi/3$  ( $\theta=60^\circ$ ) で等分割した。点源要素透水係数の補正を行う場合は、青い丸で示した点源となる節点を囲む要素（緑色の要素）を対象とした。図 3.3-3(a)～(c)に解析モデルを示す。すべてのモデルにおいて、孔の実半径  $r_w$  は 0.05m とし、全水頭  $\hat{\phi}_w$  として 100.0m を与え、奥行き 1.0m を解析領域としてモデル化した。解析領域の範囲  $R$  は孔中心から 100.0m とし、領域の境界に全水頭  $\hat{\phi}_R$  として 0.0m を与えた。解析領域の透水係数  $k$  は補正値が分かりやすいように  $1.0 \times 10^{-6} \text{m/s}$  とした。

表 3.3-1 解析モデルの緒元（円形領域群孔問題，均質モデル）

孔本数 N (本)	孔間距離 $d$ (m)	要素分割数 n	要素角度 $\theta$ (°)
2	20	4	90
3	17.321	6	60
4	14.142	4	90

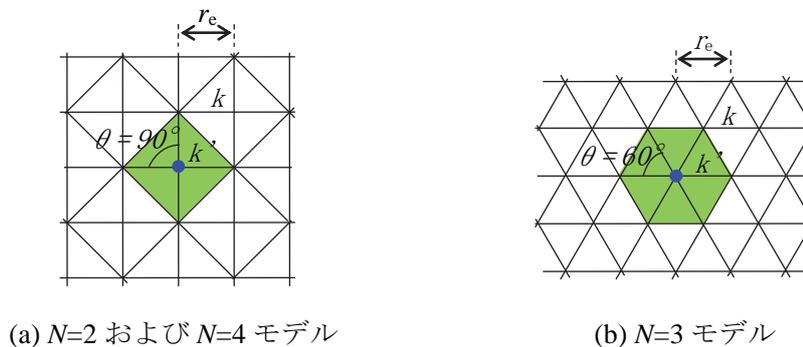
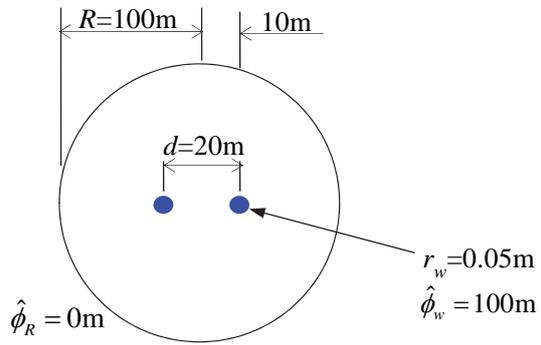
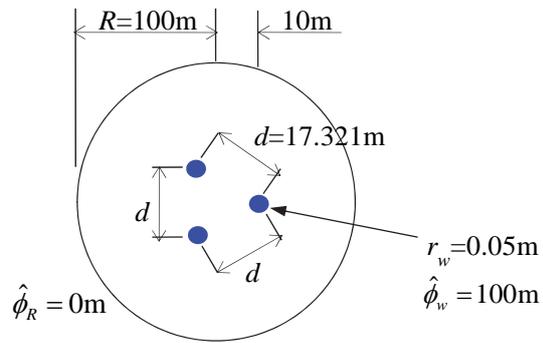


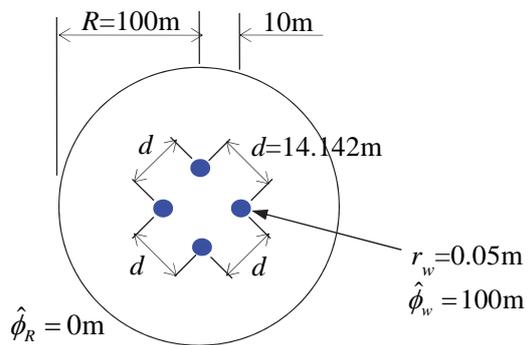
図 3.3-2 点源要素透水係数の補正（円形領域群孔問題，均質モデル）



(a) 孔本数  $N=2$



(b) 孔本数  $N=3$



(c) 孔本数  $N=4$

図 3.3-3 解析モデル (円形領域群孔問題, 均質モデル)

### (3) 解析ケース

解析モデルの要素サイズ  $r_e$  をパラメータとしたケーススタディを実施した。表 3.3-2 に解析ケースを示す。提案するモデル化の適用性を検証するため、点源の相当半径を補正しない場合と補正する場合の解析結果との比較を行った。相当半径の補正を行う場合は、図 3.3-2 で示した点源周辺の補正対象の要素について、点源要素透水係数補正式(2.5-9)から求めた補正係数  $\tilde{k}/k$  を元の透水係数  $k=1.0 \times 10^{-6} \text{m/s}$  に乗じることによって透水係数を与えた。また、参照解として、点源の半径を実サイズでモデル化し、解析領域全体を極小要素サイズで分割したモデルについても解析を行った。

表 3.3-2 解析ケース（円形領域群孔問題，均質モデル）

(a) 孔本数  $N=2$

解析 ケース	相当半径 補正	要素サイズ $r_e$ (m)	点源要素透水係数 の補正係数 $\tilde{k}/k$
参照解	補正なし (ホーリング:メッシュ分割)	0.2 (min=0.01)	1.0
2	補正なし	2	1.0
2r	補正あり		0.4258
5	補正なし	5	1.0
5r	補正あり		0.3411
10	補正なし	10	1.0
10r	補正あり		0.2965

(b) 孔本数  $N=3$

解析 ケース	相当半径 補正	要素サイズ $r_e$ (m)	点源要素透水係数 の補正係数 $\tilde{k}/k$
参照解	補正なし (ホーリング:メッシュ分割)	0.2 (min=0.01)	1.0
2	補正なし	2	1.0
2r	補正あり		0.4917
5	補正なし	5	1.0
5r	補正あり		0.3939
10	補正なし	10	1.0
10r	補正あり		0.3423

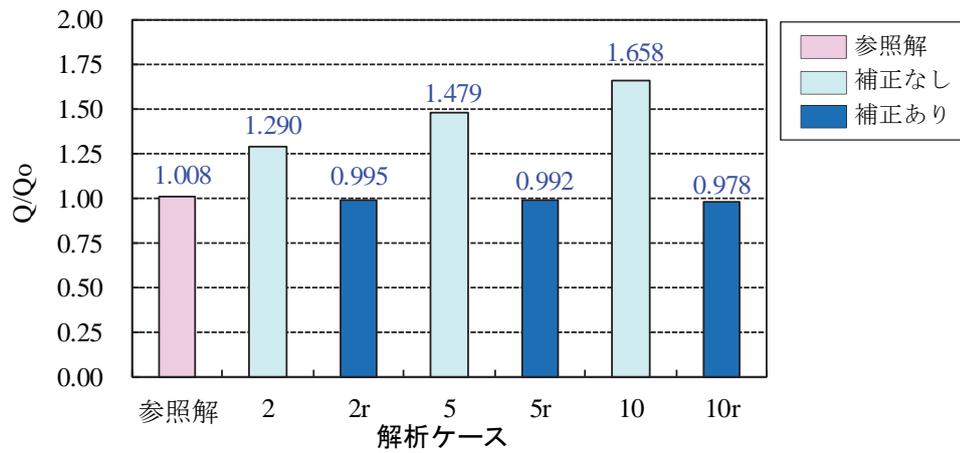
(c) 孔本数  $N=4$

解析 ケース	相当半径 補正	要素サイズ $r_e$ (m)	点源要素透水係数 の補正係数 $\tilde{k}/k$
参照解	補正なし (ホーリング:メッシュ分割)	0.2 (min=0.01)	1.0
2	補正なし	2	1.0
2r	補正あり		0.4258
5	補正なし	5	1.0
5r	補正あり		0.3411
10	補正なし	10	1.0
10r	補正あり		0.2965

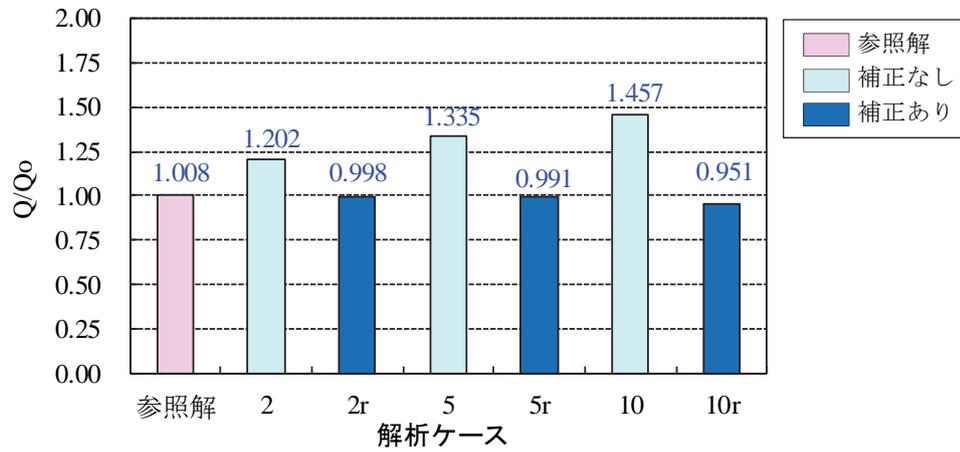
#### (4) 解析結果

一孔あたりの流量について、孔本数  $N=2$  は式(2.3-19),  $N=3$  は式(2.3-20),  $N=4$  は式(2.3-21)の理論解  $Q_0$  に対する各ケースの解析結果である点源流量  $Q$  の比を図 3.3-4 に示す。極小メッシュによる参照解の解析結果は、孔本数にかかわらず理論解とほぼ一致することが確認できた。点源の相当半径を補正しないケースでは、要素サイズが大きいほど点源の半径が過大評価されるため、理論解との差が大きくなることを示す結果となった。例えば、孔本数  $N=2$  のモデルにおいて  $r_e$  を 10m とした場合、解析解は理論解の約 1.66 倍の流量となった。一方、点源の相当半径の補正を行った結果は、要素サイズに因らずに理論解と良い一致を示した。

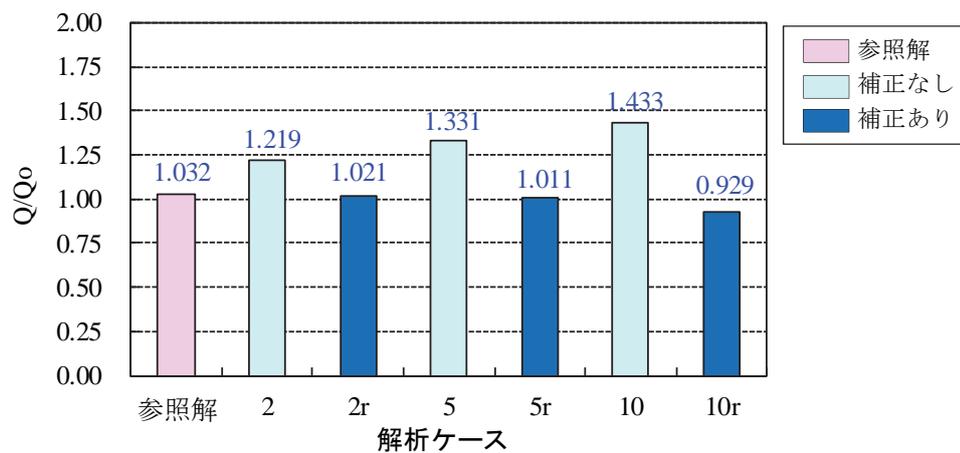
参照解および FEM 解析結果の全水頭について、図 3.3-5 の各 LINE で示す全水頭プロットラインにおいて、解析領域中心からの距離  $r(\text{m})$  の解析結果をプロットした結果を図 3.3-6 に示す。黄色い太線が参照解、塗りつぶしのマーカーは点源の相当半径の補正なしの解析結果、白抜きマーカーは点源の相当半径の補正を行った解析結果である。流量比の結果と同様、点源の相当半径の補正なしの結果は  $r_e$  が大きくなるにしたがって参照解と大きな差が生じる。孔本数  $N=2$  のモデルで  $r_e$  を 10m とした場合、参照解との水頭差は 20m 以上となった。一方、点源の相当半径を補正した結果は要素サイズに関わらず参照解と良好な一致を示した。ただし、 $r_e$  を 10m としたケースでは、補正を行っても解析領域中心において参照解との乖離が生じた。これは、各孔の配置が領域中心から 10m の距離にあるため、孔を表す点源と点源の間に節点の一つしかなく、補正する要素同士が隣接することが原因と考えられる。提案するモデル化を適用する場合においても、孔間隔とメッシュ分割数の関係に留意する必要がある。



(a) 孔本数  $N=2$

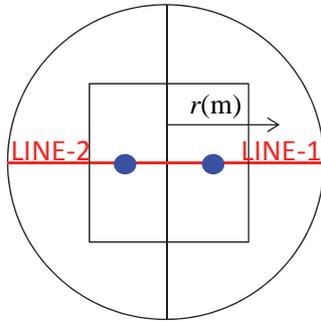


(b) 孔本数  $N=3$

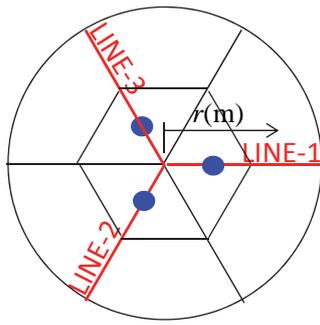


(c) 孔本数  $N=4$

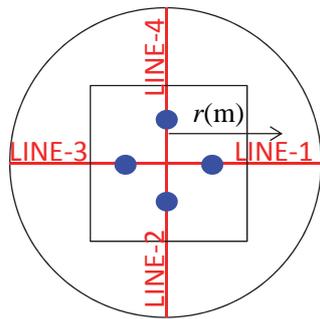
図 3.3-4 理論解  $Q_0$  に対する流量比の比較 (円形領域群孔問題, 均質モデル)



(a) 孔本数  $N=2$

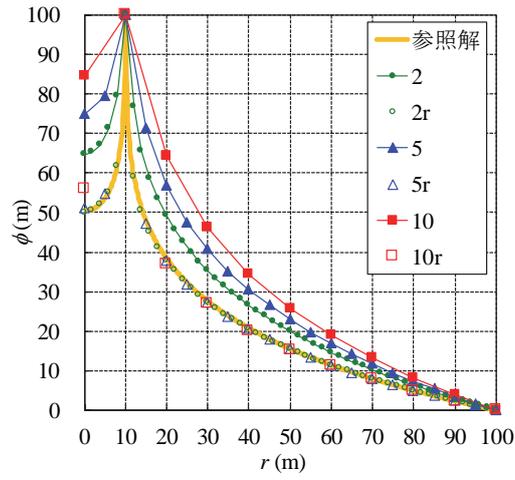


(b) 孔本数  $N=3$

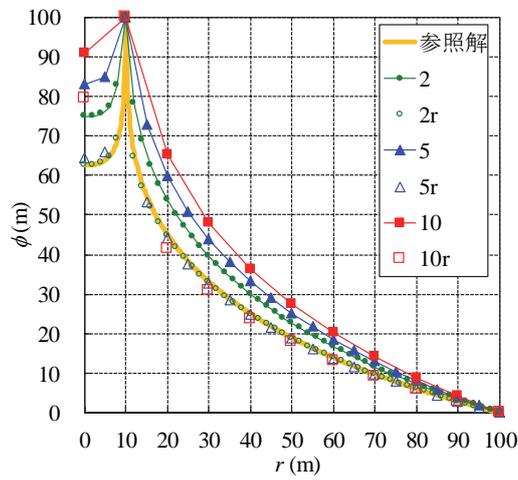


(c) 孔本数  $N=4$

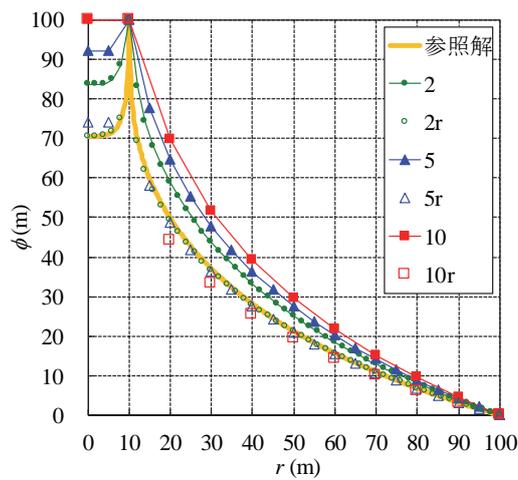
図 3.3-5 全水頭分布プロットライン (円形領域群孔問題, 均質モデル)



(a) 孔本数  $N=2$



(b) 孔本数  $N=3$



(c) 孔本数  $N=4$

図 3.3-6 全水頭分布の比較 (円形領域群孔問題, 均質モデル)

## (5) 補正式の適用性評価

今回の検討は群孔問題を対象としたものであるが、単一の孔による二次元放射状流問題の理論解から誘導した点源要素透水係数補正式を適用した結果、流量、全水頭分布ともに理論解および詳細メッシュによる参照解と良い一致を示し、大幅に精度が向上することを確認できた。これは、図 3.3-6 に示した参照解の全水頭分布で明らかなように、全体領域に比べて非常に小さい径を有する孔や井戸のような構造が存在した場合、全水頭が急激に変化する範囲は孔近傍に限られており、その外側では注水孔の影響が小さくなっていることが要因と考えられる。ただし、群孔問題に対して補正式を適用する際の妥当性については、群孔戸の本数、孔の離間距離および孔の実半径などが解に及ぼす影響を確認し、孔間で圧力の相互干渉が著しく生じるようなケースについては、さらなる適用性の検討が必要と考える。

### 3.3.2 不均質地盤を対象とした円形解析領域の群孔問題への適用

前項では、透水性が均質な円形解析領域にある群孔問題に対して、単一の孔による二次元放射状流問題の理論解から導出した補正式を適用するモデル化について評価を行った。しかし、実際の地盤は透水性が不均質であるため、解析領域の透水性を不均質な状態に設定した問題についても提案するモデル化の適用性を評価する。不均質な地盤における群孔問題には理論解が存在しないが、前項において注水孔を実サイズでメッシュ分割し、解析領域を極小メッシュで分割したモデルの解析結果は、理論解とほぼ一致していることは確認済みである。よって、ここでは極小メッシュを用いた解析結果を参照解として、提案するモデル化の適用性評価に用いる。

#### (1) 解析モデル

地盤の透水性にばらつきを設定した不均質モデルにおける適用性評価でも、注水孔本数  $N$  が 2 本～4 本の群孔モデルの飽和定常浸透流問題を対象とする。表 3.3-3 に解析モデルの諸元を示す。注水孔は解析領域の中心から 10m 離れた位置に等間隔  $d$  で配置するものとした。解析領域の要素分割は領域端部を除き、同じサイズの 6 節点五面体一次要素を用いて一様に行った。図 3.2-8 に点源周辺の要素分割について示す。  $N=2$  および  $N=4$  のモデルは点源周りを  $\theta = \pi/2$  ( $\theta=90^\circ$ )、  $N=3$  のモデルは  $\theta = \pi/3$  ( $\theta=60^\circ$ ) で等分割した。点源周辺要素の補正を行う場合は、青い丸で示した点源となる節点を囲む要素（透水係数ごとに色のついた要素）を対象とした。図 3.3-8 に解析モデルを示す。すべての不均質モデルにおいて、孔の実半径  $r_w$  は 0.05m とし、全水頭  $\hat{\phi}_w$  として 100.0m を与え、奥行き 1.0m を解析領域としてモデル化した。解析領域の範囲  $R$  は孔中心から 100.0m とし、領域の境界に全水頭  $\hat{\phi}_r$  として 0.0m を与えた。不均質モデルでは解析領域を複数の領域に分け、ばらつきのある透水性を設定した。  $N=2$  および  $N=4$  のモデルでは解析領域を 8 つの領域に分け、それぞれの領域に透水係数  $k_1 \sim k_8$  を設定し、  $N=3$  のモデルでは解析領域を 12 の領域に分けて、透水係数  $k_1 \sim k_{12}$  を設定した。

表 3.3-3 解析モデルの緒元（円形領域群孔問題，不均質モデル）

孔本数 N (本)	孔間距離 $d$ (m)	要素分割数 n	要素角度 $\theta$ (°)
2	20	4	90
3	17.321	6	60
4	14.142	4	90

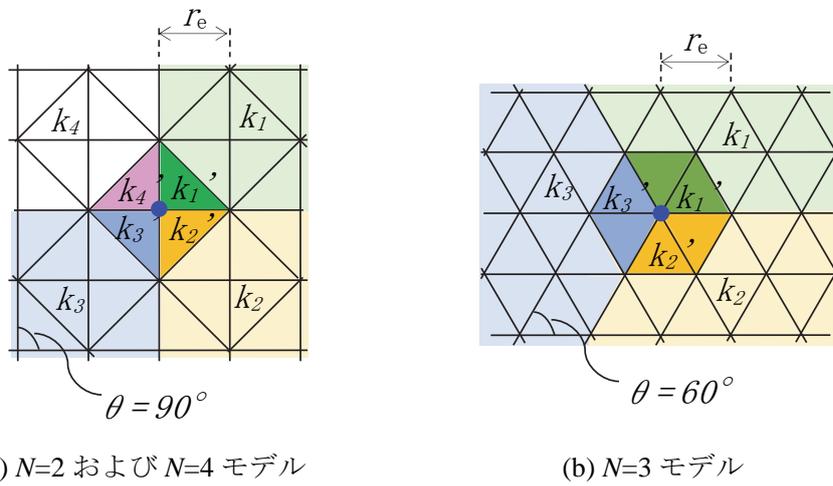
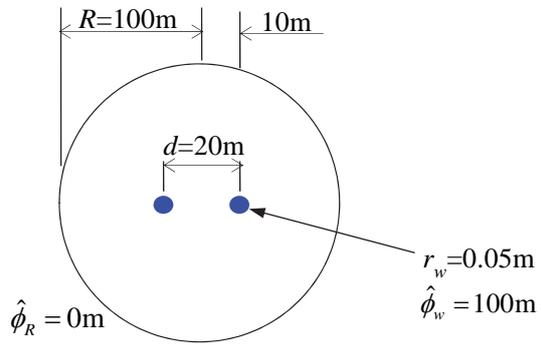
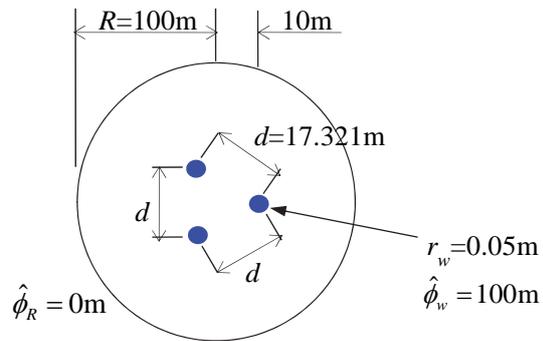


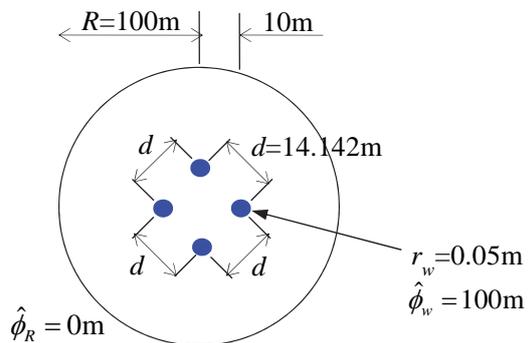
図 3.3-7 点源要素透水係数の補正（円形領域群孔問題，不均質モデル）



(a) 孔本数  $N=2$

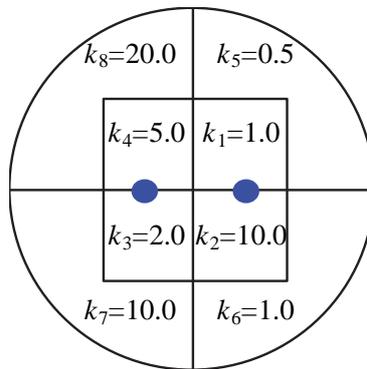


(b) 孔本数  $N=3$

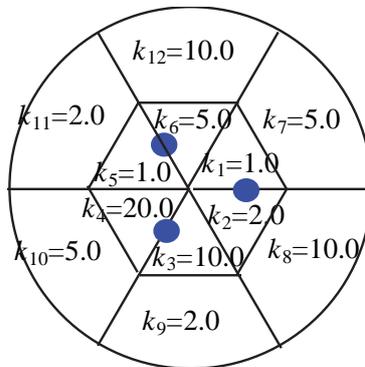


(c) 孔本数  $N=4$

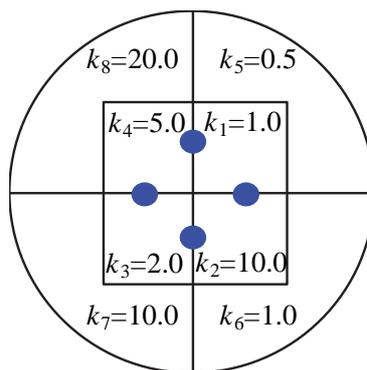
図 3.3-8 解析モデル (円形領域群孔問題, 不均質モデル)



(a) 孔本数  $N=2$



(b) 孔本数  $N=3$



(c) 孔本数  $N=4$

単位 :  $\times 10^{-6} \text{m/s}$

図 3.3-9 解析モデルの透水係数分布 (円形領域群孔問題, 不均質モデル)

## (2) 解析ケース

解析モデルの要素サイズ $r_e$ をパラメータとしたケーススタディを実施した。表 3.3-4 に解析ケースを示す。補正式(2.5-9)の適用性を検証するため、点源の相当半径を補正しない場合と補正する場合の解析結果との比較を行った。相当半径の補正を行う場合は、図 3.2-8 で示した点源を含む補正対象の要素について、補正式(2.5-9)から求めた補正係数 $\tilde{k}/k$ を元の透水係数に乗じることによって透水係数を与えた。また、不均質な地盤を対象とした問題では理論解が存在しないため、ここで取り扱う問題の参照解として、孔の半径を実サイズでメッシュ分割し、解析領域全体を極小の要素サイズで分割したモデルについても解析を行った。

表 3.3-4 解析ケース（円形領域群孔問題，不均質モデル）

(a) 孔本数  $N=2$

解析ケース	相当半径補正	要素サイズ $r_e$ (m)	点源要素透水係数の補正係数 $\tilde{k}/k$
参照解	補正なし (ホーリング:メッシュ分割)	0.2 (min=0.01)	1.0
u-2	補正なし	2	1.0
u-2r	補正あり		0.4258
u-5	補正なし	5	1.0
u-5r	補正あり		0.3411
u-10	補正なし	10	1.0
u-10r	補正あり		0.2965

(b) 孔本数  $N=3$

解析ケース	相当半径補正	要素サイズ $r_e$ (m)	点源要素透水係数の補正係数 $\tilde{k}/k$
参照解	補正なし (ホーリング:メッシュ分割)	0.2 (min=0.01)	1.0
u-2	補正なし	2	1.0
u-2r	補正あり		0.4917
u-5	補正なし	5	1.0
u-5r	補正あり		0.3939
u-10	補正なし	10	1.0
u-10r	補正あり		0.3423

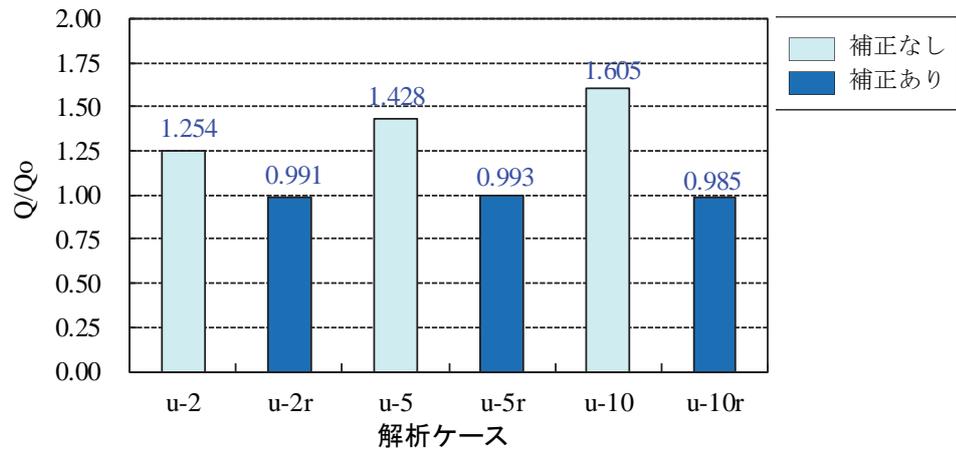
(c) 孔本数  $N=4$

解析ケース	相当半径補正	要素サイズ $r_e$ (m)	点源要素透水係数の補正係数 $\tilde{k}/k$
参照解	補正なし (ホーリング:メッシュ分割)	0.2 (min=0.01)	1.0
u-2	補正なし	2	1.0
u-2r	補正あり		0.4258
u-5	補正なし	5	1.0
u-5r	補正あり		0.3411
u-10	補正なし	10	1.0
u-10r	補正あり		0.2965

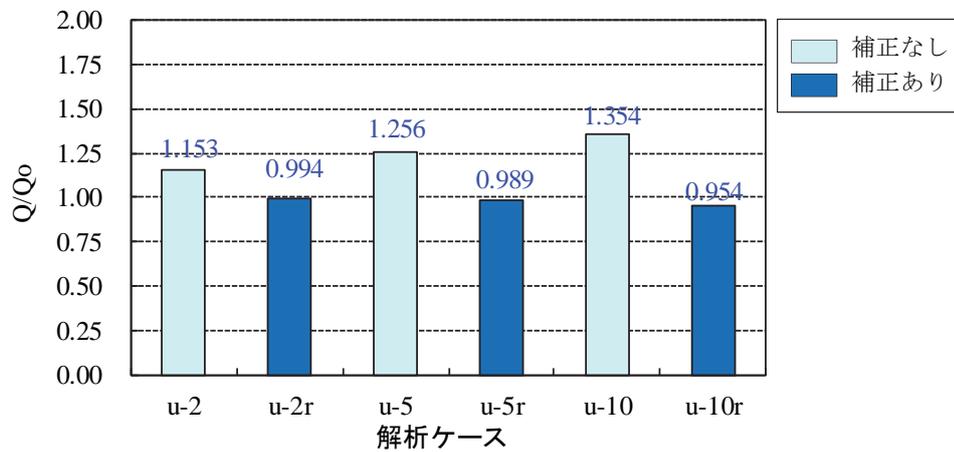
### (3) 解析結果

一孔あたりの流量について、参照解  $Q_r$  に対する各ケースの解析結果である点源流量  $Q$  の比を図 3.3-10 に示す。解析結果は、孔本数にかかわらず、点源の相当半径を補正しないケースでは、要素サイズが大きいほど点源の半径が過大評価されるため、参照解との差が大きくなることを示す結果となった。例えば、孔本数 2 本のモデルにおいて  $r_e$  を 10m とした場合、解析解は理論解の約 1.6 倍の流量となった。一方、点源の相当半径の補正を行った結果は、要素サイズに因らずに理論解と良い一致を示した。不均質モデルの結果においても前項で扱った均質モデルと同様に、点源の相当半径の補正を行うことにより、大幅に解析精度が向上する結果が得られた。

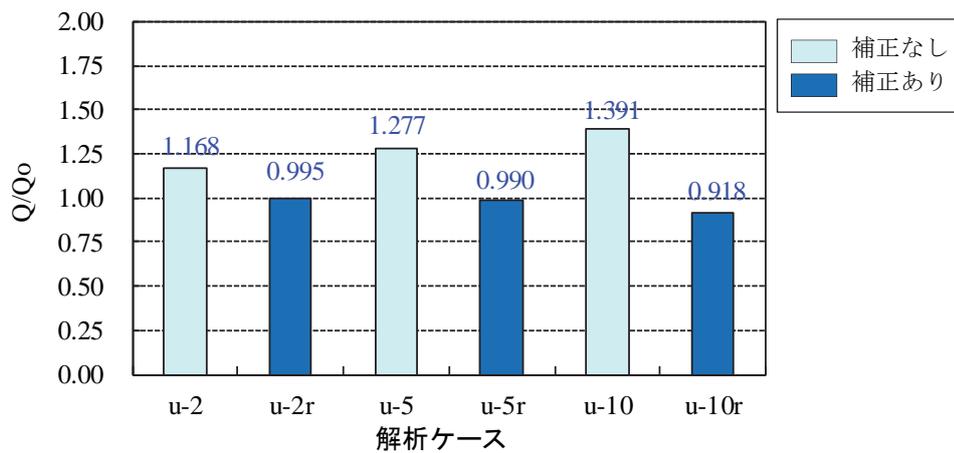
参照解および FEM 解析結果の全水頭について、図 3.3-11 の各 LINE で示す全水頭プロットラインにおいて、解析領域中心からの距離  $r(m)$  に解析結果をおいてプロットした結果を図 3.3-12～図 3.3-14 に示す。黄色い太線が参照解、塗りつぶしのマーカーは点源の相当半径の補正なしの解析結果、白抜きマーカーは点源の相当半径の補正を行った解析結果である。点源の相当半径の補正なしの結果は、 $r_e$  が大きくなるにしたがって参照解と大きな差が生じる。一方、点源の相当半径を補正した結果は、要素サイズに関わらず、参照解と良好な一致を示し、透水性のばらつきによる全水頭の変化傾向を良く捉えていることがわかる。ただし、 $r_e$  を 10m としたケースでは、補正を行っても解析領域中心において参照解との乖離が生じた。これは、各孔の配置が領域中心から 10m の距離にあるため、孔を表す点源と点源の間に節点一つしかなく、補正する要素同士が隣接することが原因と考えられる。提案するモデル化を適用する場合においても、孔間隔とメッシュ分割数の関係に留意する必要がある。



(a) 孔本数  $N=2$

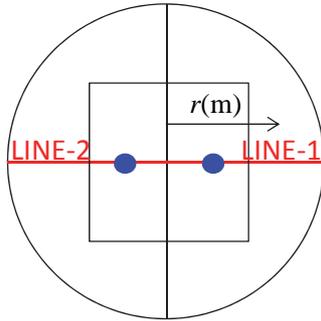


(b) 孔本数  $N=3$

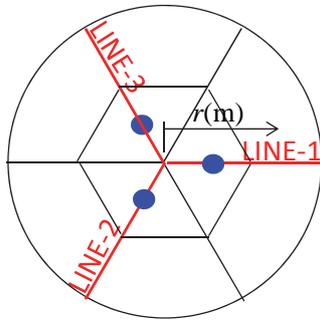


(c) 孔本数  $N=4$

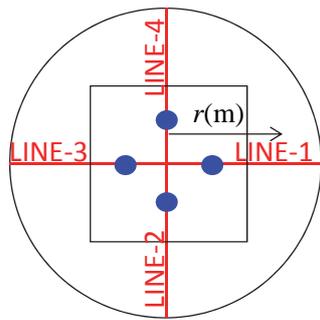
図 3.3-10 参照解  $Q_r$  に対する流量比の比較 (円形領域群孔問題, 不均質モデル)



(a) 孔本数  $N=2$

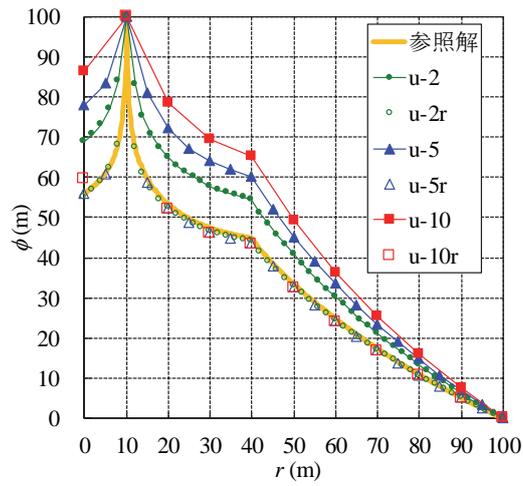


(b) 孔本数  $N=3$

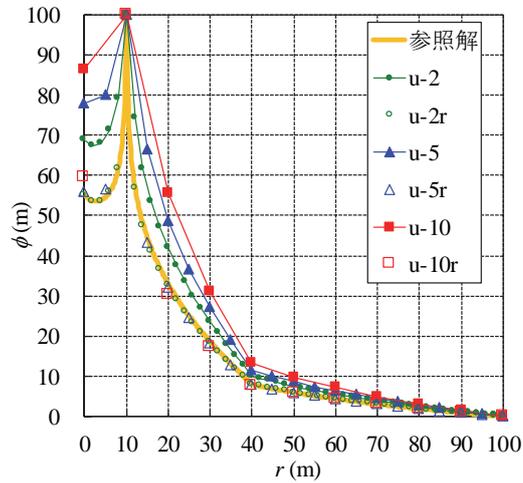


(c) 孔本数  $N=4$

図 3.3-11 全水頭分布プロットライン（円形領域群孔問題，不均質モデル）

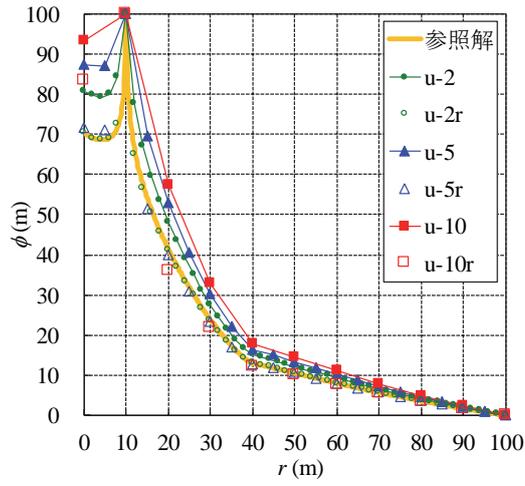


(a) Line-1

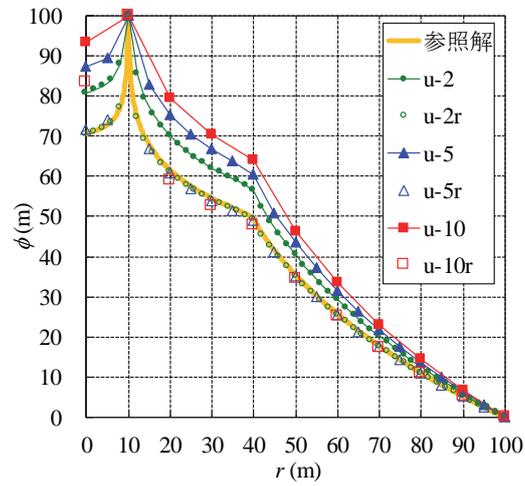


(b) Line-2

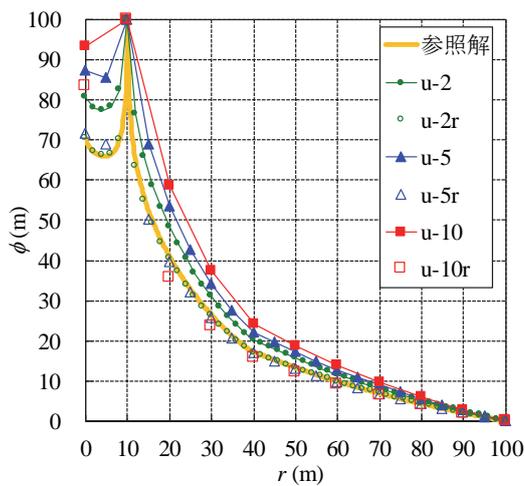
図 3.3-12 全水頭分布の比較（円形領域群孔問題，不均質モデル，孔本数  $N=2$ ）



(a) Line-1

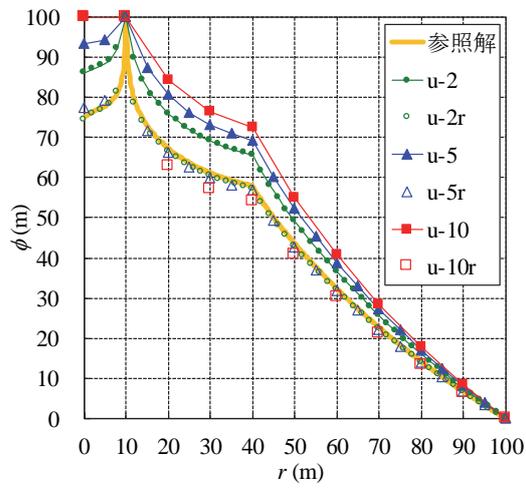


(b) Line-2

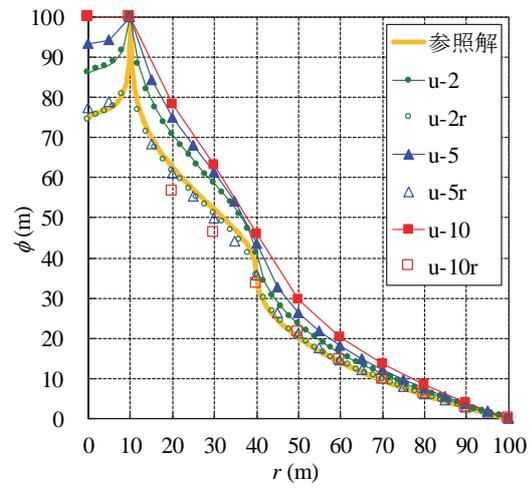


(c) Line-3

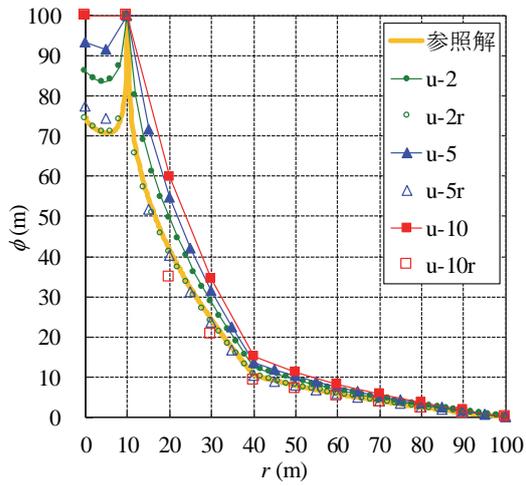
図 3.3-13 全水頭分布の比較 (円形領域群孔問題, 不均質モデル, 孔本数  $N=3$ )



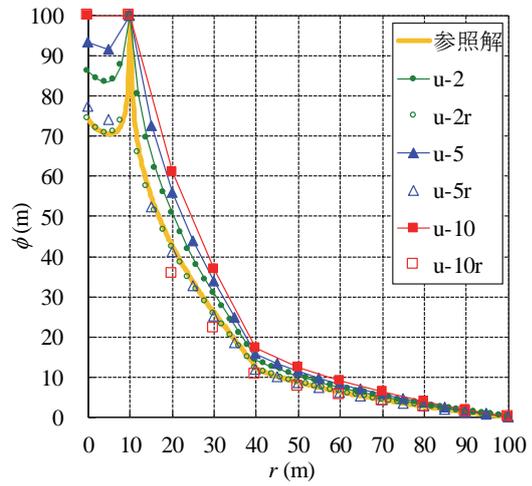
(a) Line-1



(b) Line-2



(c) Line-3



(d) Line-4

図 3.3-14 全水頭分布の比較（円形領域群孔問題，不均質モデル，孔本数  $N=4$ ）

#### (4) 補正式の適用性評価

本項の検討は、透水性が不均質な地盤における群孔問題を対象としたものであるが、均質な地盤における単一孔の二次元放射状流問題の理論解から導出した点源要素透水係数補正式を用いて相当半径の補正を行った結果、孔の流量、全水頭分布ともに理論解および極小メッシュを用いた参照解と良い一致を示し、補正を行わない従来のモデル化に比べて大幅に精度が向上することを確認できた。これは、点源の相当半径は要素サイズに依存し、補正式は要素サイズの影響を補正するものであること、また、図 3.3-12～図 3.3-14 に示した参照解の全水頭分布で明らかなように、不均質な地盤であっても、全体領域に比べて非常に小さい径を有する孔のような構造が存在した場合、全水頭が急激に変化する範囲は孔近傍に限られており、その外側では孔の影響が小さくなっていることが要因と考えられる。ただし、群孔問題に対して補正式を適用する際の妥当性については、前項でも述べたように、群孔の本数、孔の離間距離および孔の実半径などが解に及ぼす影響を確認し、孔間で圧力の相互干渉が著しく生じるようなケースについては、適用性の検討が必要と考える。また、全水頭が急激に変化する範囲は孔近傍となっているが、透水係数とその分布状態によって全水頭の変化の傾向は異なるため、孔周辺で地盤の透水性が極端に変化することが想定される場合についても、今後さらなる検証が必要である。

### 3.3.3 直線定圧境界近傍の群孔問題への適用

提案するモデル化を一般的な問題に適用することを想定し、河川のような直線状の圧力規定境界の近傍に孔群が配置された問題を対象とした数値実験を行った。

#### (1) 直線定圧境界近傍の群孔問題の理論解

2.3.3で述べたとおり、図 3.3-15に示す河川や運河のような非常に長い直線の定圧境界の近傍に配置された孔から、地下水を一定量注水（揚水）する問題の任意の位置 $(x,y)$ における全水頭 $\phi$ の理論解は次式で表される<sup>47)</sup>。

$$\phi = \frac{1}{4\pi k} \sum_{m=0}^{n-1} Q_m \left[ \frac{(x-ma)^2 + (y-d)^2}{(x-ma)^2 + (y+d)^2} \right] + \hat{\phi}_B \quad (3.3-1)$$

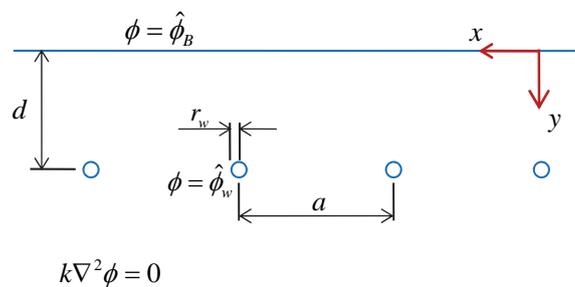


図 3.3-15 直線定圧境界近傍の群孔問題

また、1孔あたりの流量 $Q_m$ は帯水層厚さ $D$ を用いて次式で表される<sup>47)</sup>。

単孔問題 ( $n=1$ ) の場合、

$$Q_0 = \frac{2\pi k D (\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w)}{\ln(2d / r_w)} \quad \text{ただし, } d \gg r_w \quad (3.3-2)$$

二孔問題 ( $n=2$ ) の場合、

$$Q_0 = Q_1 = \frac{2\pi k D (\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w)}{\ln \frac{2d}{r_w} + \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{4d^2}{a^2} \right)} \quad \text{ただし, } d \gg r_w, 2d \geq a \quad (3.3-3)$$

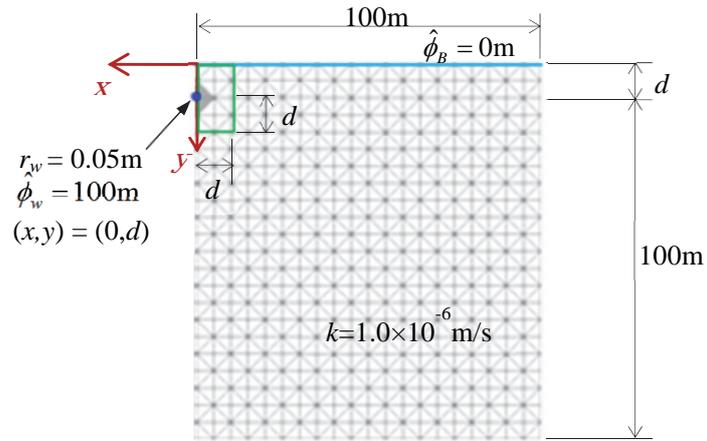
無限配列孔問題 ( $n=\infty$ ) の場合、

$$Q_m = \frac{2\pi k D (\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w)}{\ln \left( a e^{\frac{2\pi d}{a}} / 2\pi r_w \right)} \quad \text{ただし, } d \gg r_w, 2d \geq a \quad (3.3-4)$$

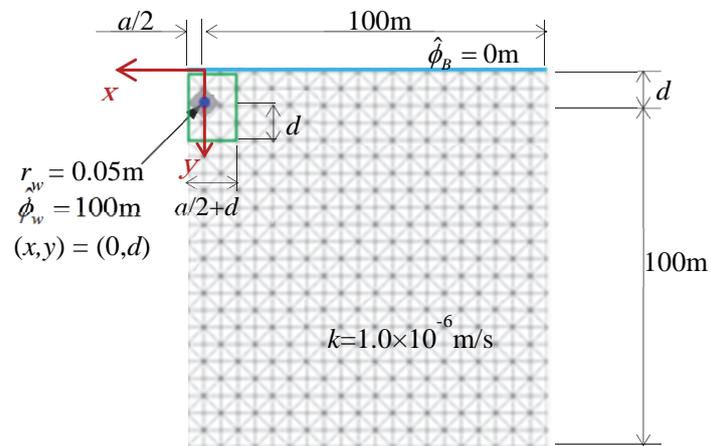
## (2) 解析モデル

図 3.3-16は(a)単孔問題、(b)二孔問題および(c)無限配列孔問題の解析モデルである。問題の対称性を考慮して、(a)単孔問題および(b)二孔問題では領域の半分のみをモデル化し、(c)無限配列孔問題では1孔のみをモデル化した。すべての解析モデルの奥行き方向は単位長さの1要素であり、解析領域は単一形状の6節点五面体一次要素を用いて一様に分割した。注水孔の実半径  $r_w$  は0.05mとし、境界条件として  $\hat{\phi}_w = 100\text{m}$  を与えた。直線定圧境界には  $\hat{\phi}_B = 0\text{m}$  を与え、その他の境界は注水孔から十分離れた位置として100mの距離に設定し、不透水境界とした。解析領域の透水係数  $k$  は補正值が分かりやすいように  $1.0 \times 10^{-6}\text{m/s}$  とした。

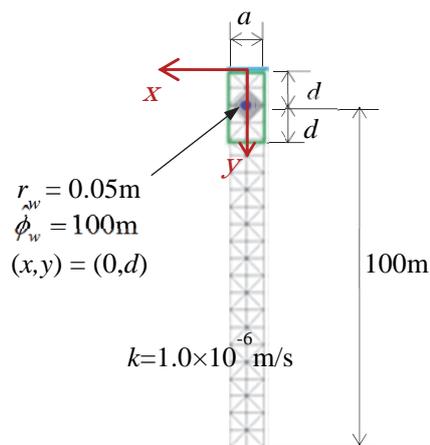
注水孔は図 3.3-16中の青色の節点における点源で表し、2種のモデル化を行った。①補正点源モデル：点源を含む濃い灰色の要素の透水係数を、補正式(2.5-9)を用いて補正したモデル、②未補正点源モデル：点源を含む要素の透水係数を補正していないモデルである。



(a) 単孔問題



(b) 二孔問題



(c) 無限配列孔問題

図 3.3-16 解析モデル (直線定圧境界近傍の群孔問題)

### (3) 解析ケース

図 3.3-16 (a)~(c)の三つの解析モデルにおいて、要素サイズの変化、および、直線定圧境界と群孔の影響に関する提案するモデル化の適用性評価を行った。表 3.3-5 は単孔問題の解析ケース、表 3.3-6 は二孔問題および無限配列孔問題の解析ケースである。表 3.3-5 および表 3.3-6 に示すとおり、要素サイズは 6 節点五面体一次要素の直角二等辺三角形の短辺の長さ  $r_e$  を 1, 2.5, 5m に変化させた 3 種のケースを設定した。また、直線定圧境界から注水孔までの距離  $d$  は 5, 10, 20m の 3 種のケースを設定した。表 3.3-6 の二孔問題および無限配列孔問題の解析ケースにおける孔間距離  $a$  は 10, 20m の 2 種のケースを設定した。相当半径の補正を行うケースでは、補正式(2.5-9)から求めた補正係数  $\tilde{k}/k$  を元の透水係数  $k=1.0 \times 10^{-6} \text{m/s}$  に乗じることによって透水係数を与えた。

表 3.3-5 解析ケース（直線定圧境界近傍問題，単孔問題）

解析ケース	要素サイズ $r_e$ (m)	相当半径補正	点源要素透水係数の補正係数 $\tilde{k}/k$	定圧境界からの距離 $d$ (m)
1	1	補正なし	1.0	5,10,20
1r		補正あり	0.5243	
2.5	2.5	補正なし	1.0	
2.5r		補正あり	0.4015	
5	5	補正なし	1.0	
5r		補正あり	0.3411	

表 3.3-6 解析ケース（直線定圧境界近傍問題，二孔問題および無限配列問題）

解析ケース	要素サイズ $r_e$ (m)	相当半径補正	点源要素透水係数の補正係数 $\tilde{k}/k$	定圧境界からの距離 $d$ (m)	孔間距離 $a$ (m)
1	1	補正なし	1.0	5,10,20	10,20
1r		補正あり	0.5243		
2.5	2.5	補正なし	1.0		
2.5r		補正あり	0.4015		
5	5	補正なし	1.0		
5r		補正あり	0.3411		

#### (4) 解析結果

式(3.3-2)～式(3.3-4)に示す理論解 $Q_0$ に対する各ケースの解析結果である点源流量 $Q$ の比について、単孔問題は図 3.3-17、二孔問題は図 3.3-19 および図 3.3-20、無限配列孔問題は図 3.3-23 および図 3.3-24 に示す。図中、横軸は表 3.3-5 および表 3.3-6 に示す解析ケースである。従来のモデル化による相当半径の補正を行わない結果は、要素サイズが大きいほど孔の半径が過大評価されるため、理論解との差が大きくなる。一方で、相当半径の補正を行った結果は、要素サイズに因らずに理論解と良い一致を示した。

直線定圧境界から注水孔を通る方向の全水頭プロファイルについて、単孔問題は図 3.3-18、二孔問題は図 3.3-21 および図 3.3-22、無限配列孔問題は図 3.3-25 および図 3.3-26 に示す。点源位置を $r=0$ とし、点源から直線定圧境界に向かう方向の距離を $r$ の負値、その反対方向への距離を $r$ の正值で表している。黄色い太線が理論解、白抜きのマーカーは相当半径を補正した解析結果、塗りつぶしたマーカーは補正を行わない結果である。流量比と同様に、補正なしの結果は、要素サイズが大きくなるのにしただがって理論解と大きな差が生じ、補正した結果は要素サイズに関わらず理論解と良好な一致を示した。

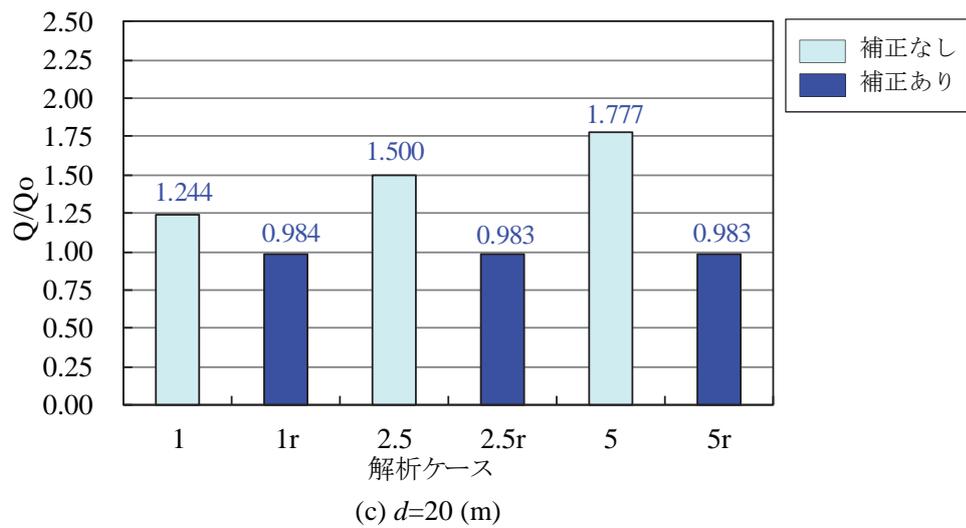
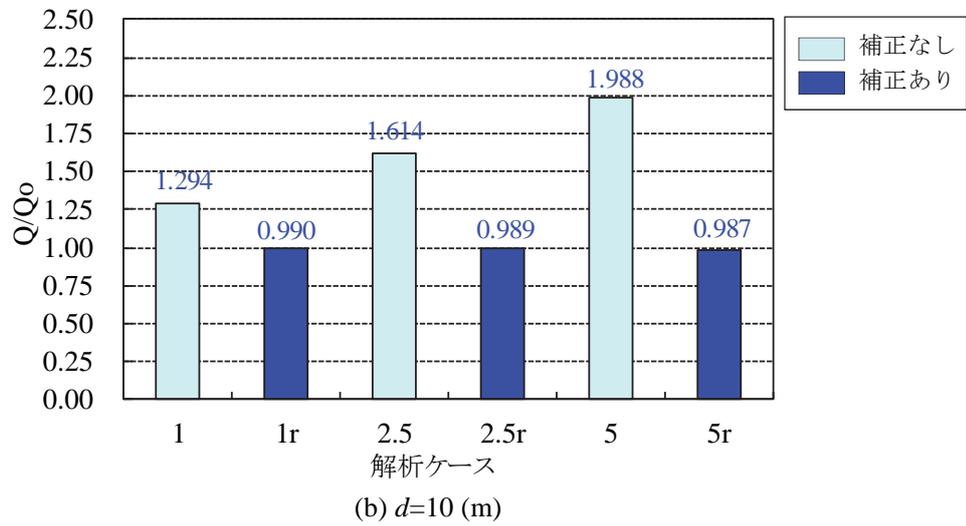
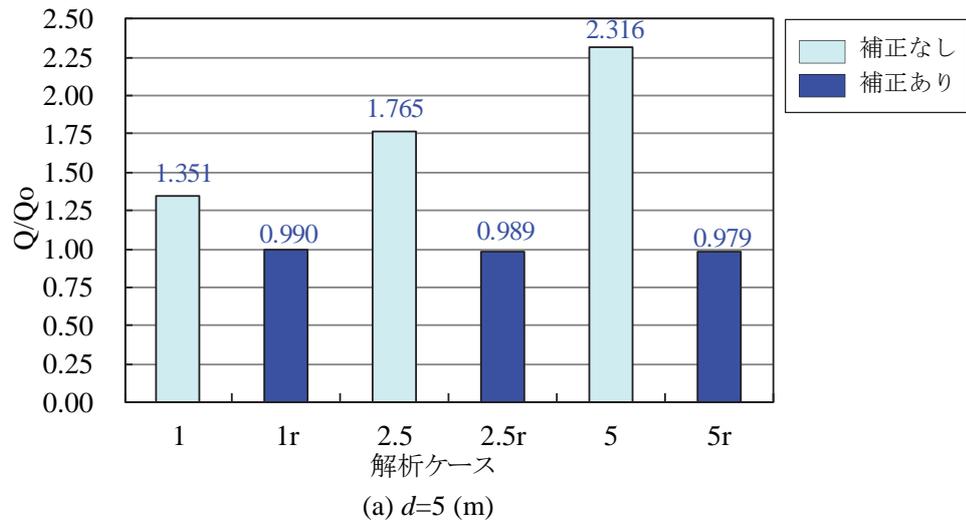


図 3.3-17 理論解  $Q_0$  に対する流量比の比較 (単孔問題)

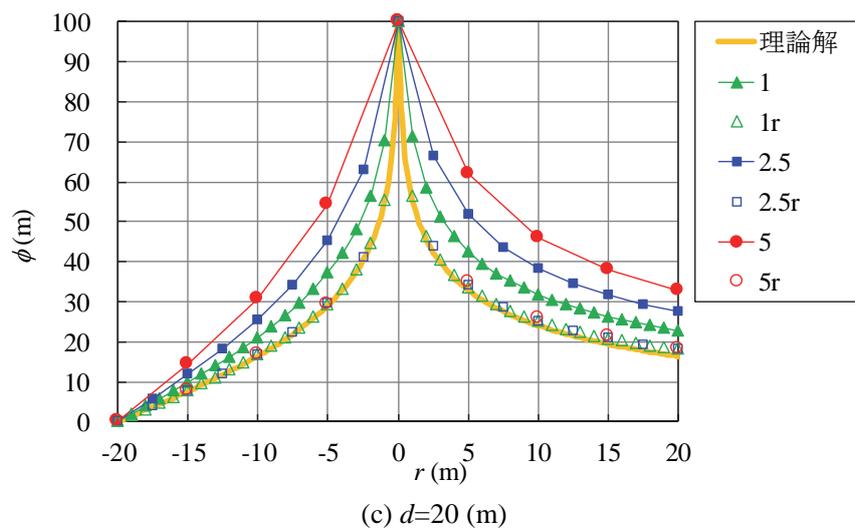
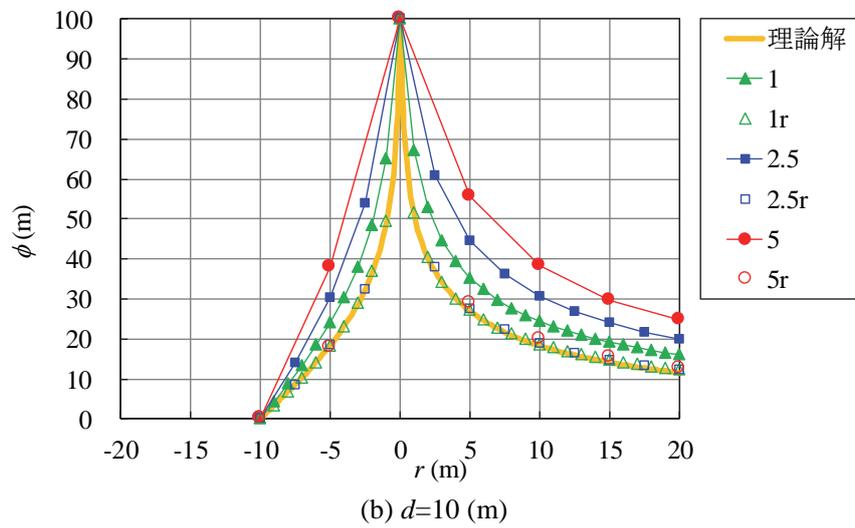
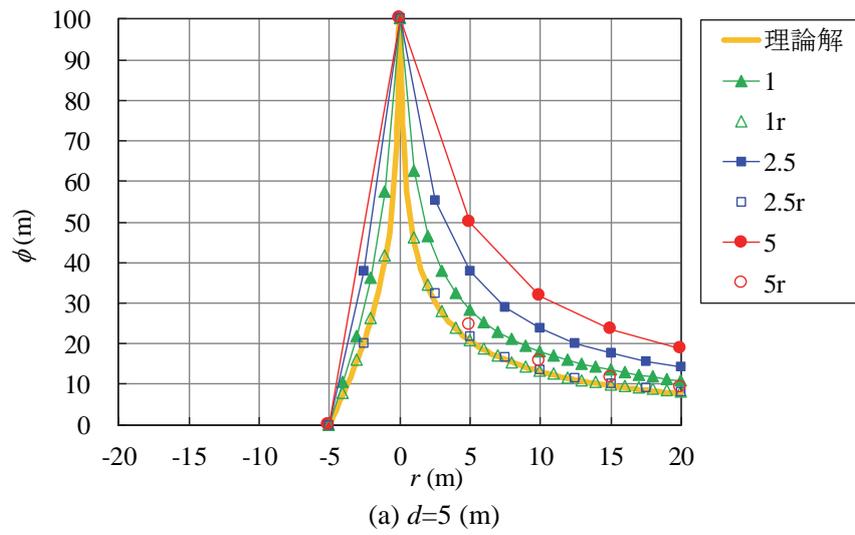
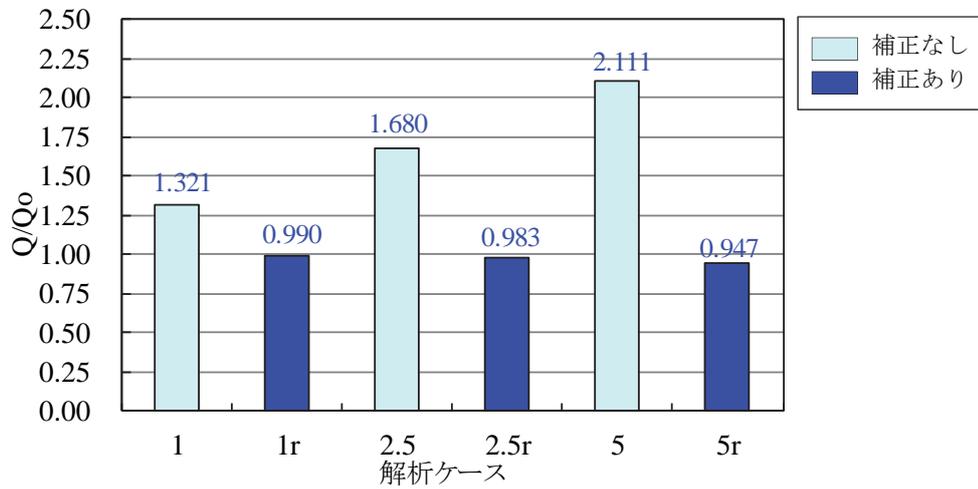
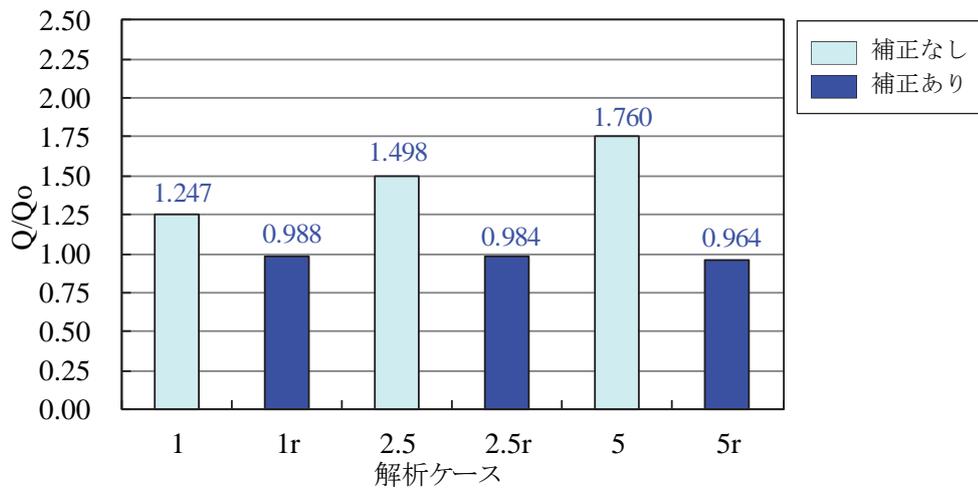


図 3.3-18 全水頭分布の比較 (単孔問題)

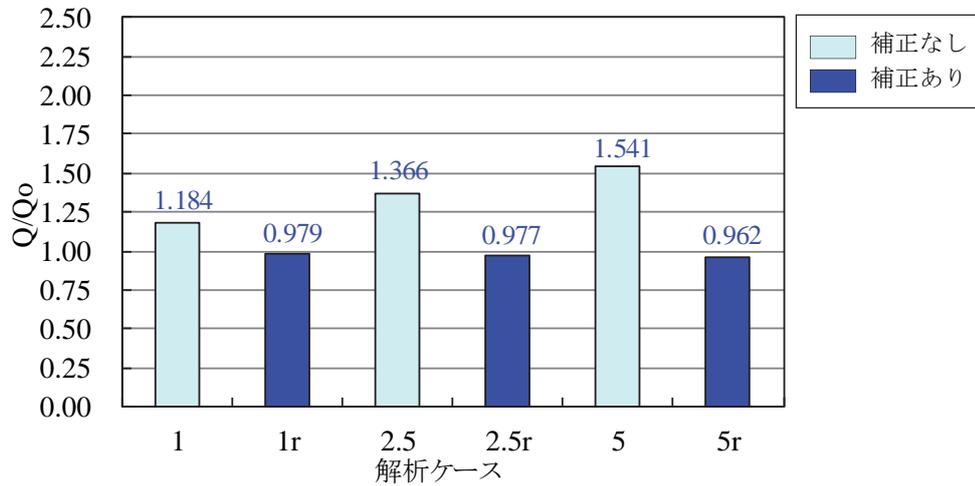


(a)  $a=10(\text{m}), d=5(\text{m})$

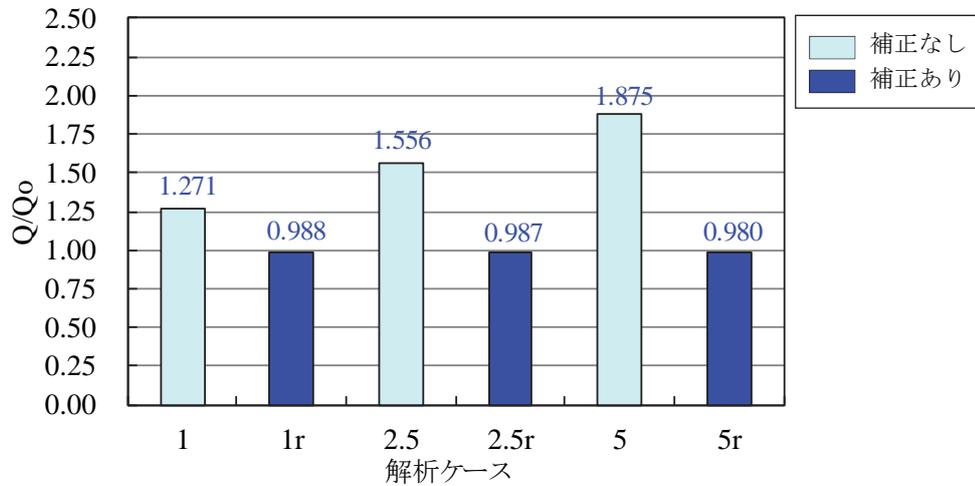


(b)  $a=10(\text{m}), d=10(\text{m})$

図 3.3-19 理論解  $Q_0$  に対する流量比の比較 (二孔問題,  $a=10(\text{m}), d=5(\text{m})$  および  $a=10(\text{m}), d=10(\text{m})$ )



(c)  $a=10(\text{m}), d=20(\text{m})$



(d)  $a=20(\text{m}), d=10(\text{m})$

図 3.3-20 理論解  $Q_0$  に対する流量比の比較 (二孔問題,  $a=10(\text{m}), d=20(\text{m})$  および  $a=20(\text{m}), d=10(\text{m})$ )

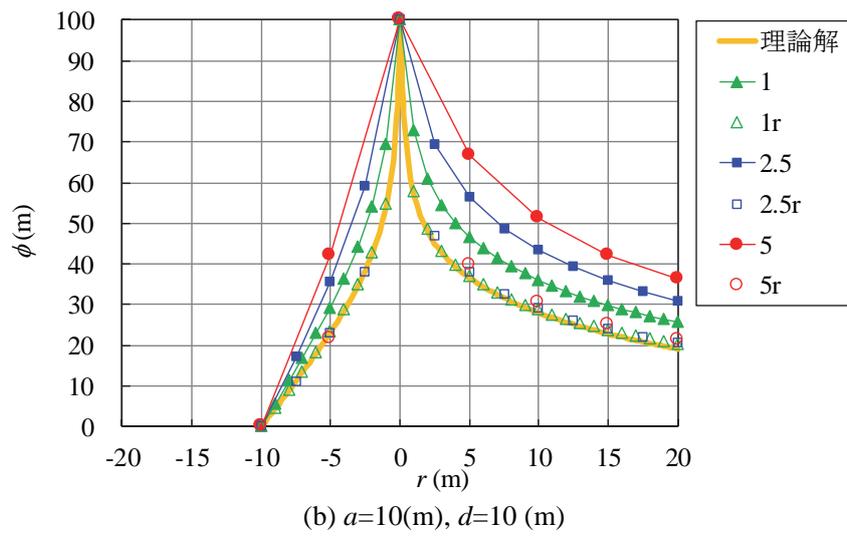
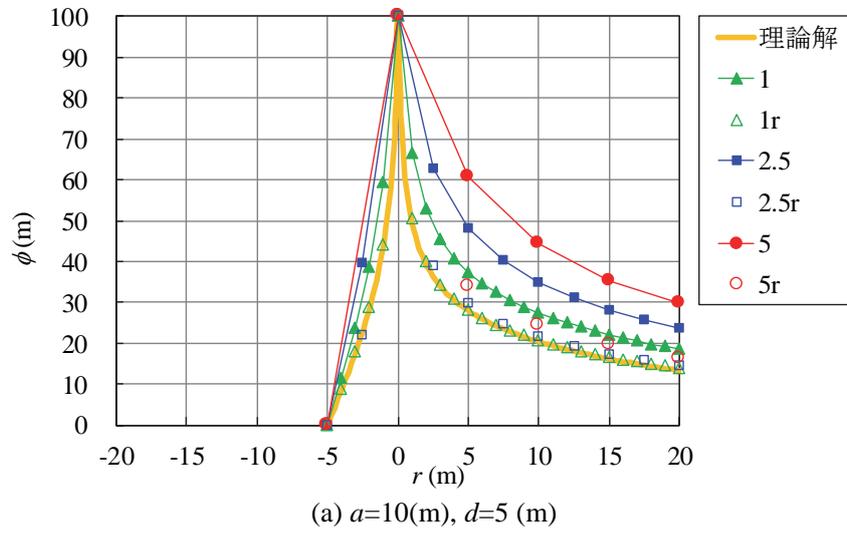
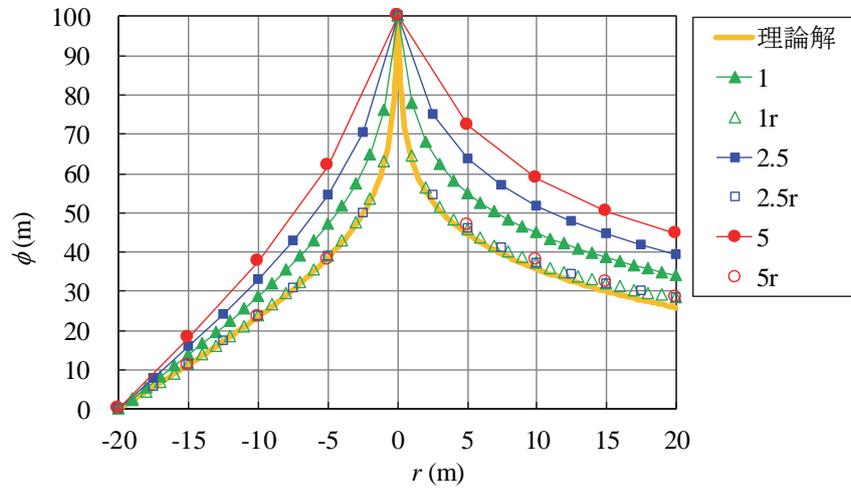
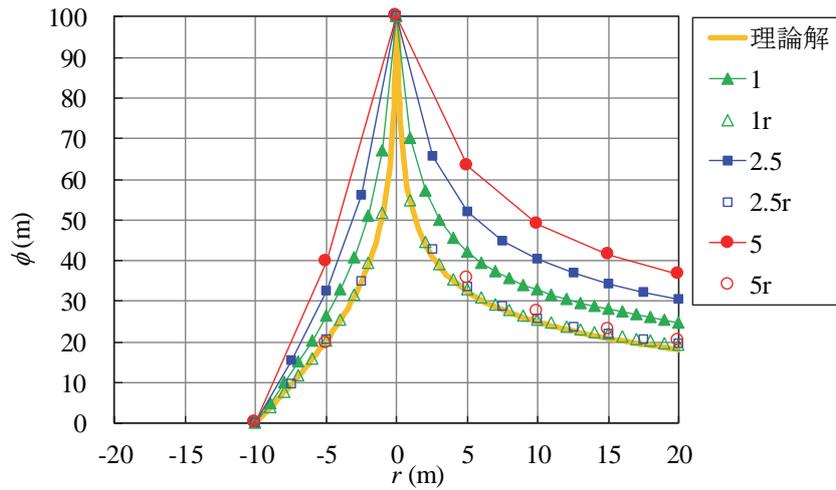


図 3.3-21 全水頭分布の比較（二孔問題， $a=10(\text{m}), d=5(\text{m})$ および  $a=10(\text{m}), d=10(\text{m})$ ）

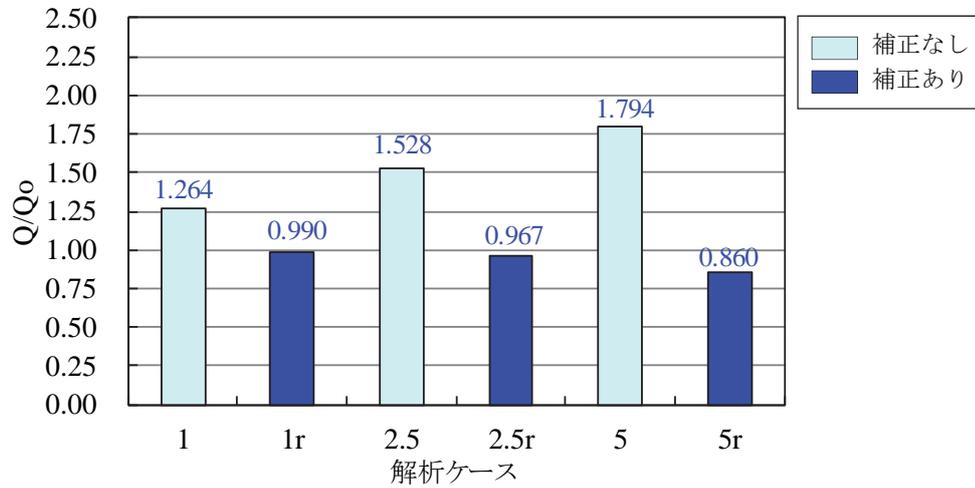


(c)  $a=10(\text{m}), d=20(\text{m})$

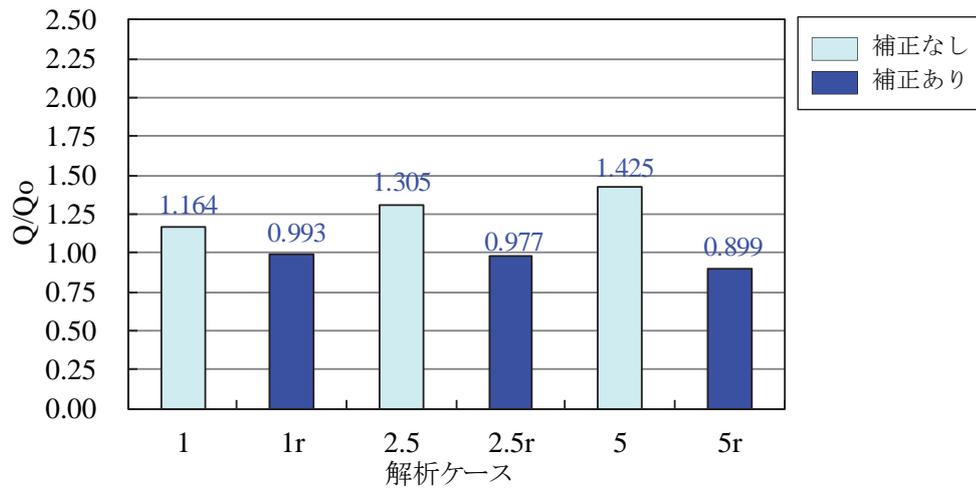


(d)  $a=20(\text{m}), d=10(\text{m})$

図 3.3-22 全水頭分布の比較（二孔問題， $a=10(\text{m}), d=20(\text{m})$ および  $a=20(\text{m}), d=10(\text{m})$ ）

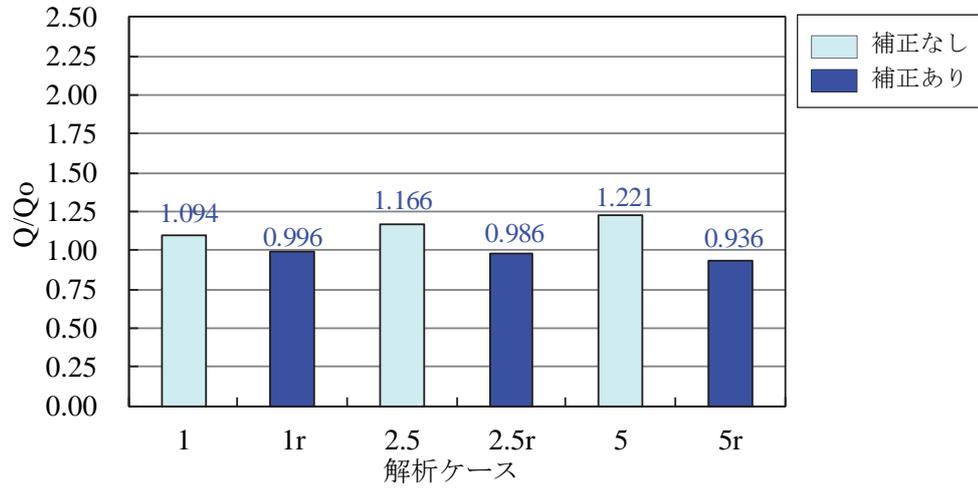


(a)  $a=10(\text{m}), d=5(\text{m})$

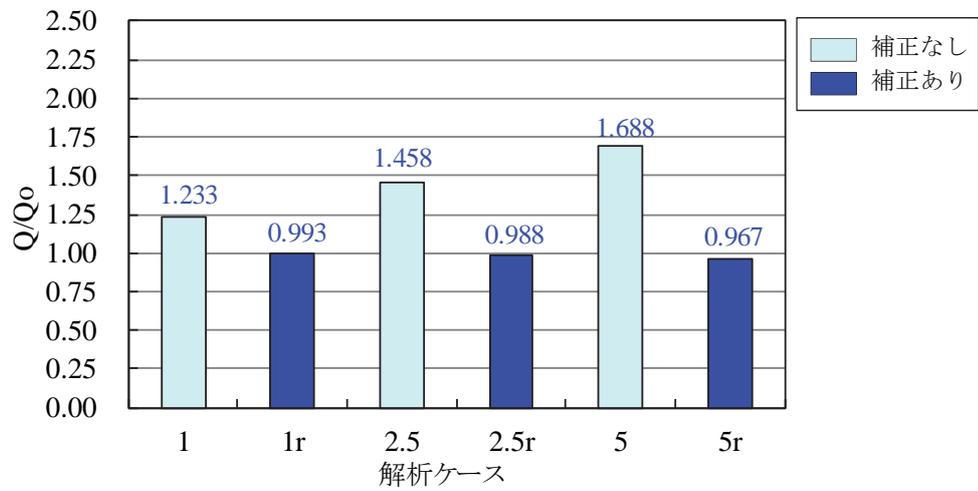


(b)  $a=10(\text{m}), d=10(\text{m})$

図 3.3-23 理論解  $Q_0$  に対する流量比の比較 (無限配列孔問題,  $a=10(\text{m}), d=5(\text{m})$  および  $a=10(\text{m}), d=10(\text{m})$ )



(c)  $a=10(\text{m}), d=20(\text{m})$



(d)  $a=20(\text{m}), d=10(\text{m})$

図 3.3-24 理論解  $Q_0$  に対する流量比の比較 (無限配列孔問題,  $a=10(\text{m}), d=20(\text{m})$  および  $a=20(\text{m}), d=10(\text{m})$ )

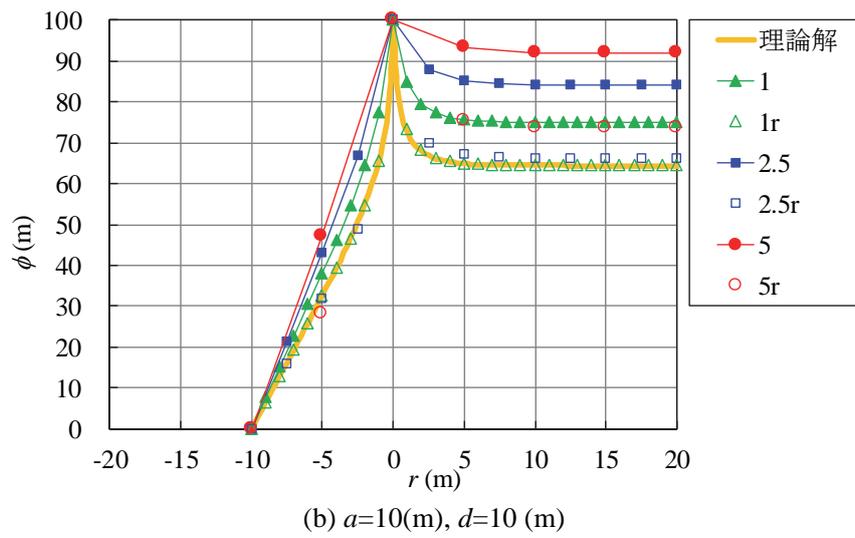
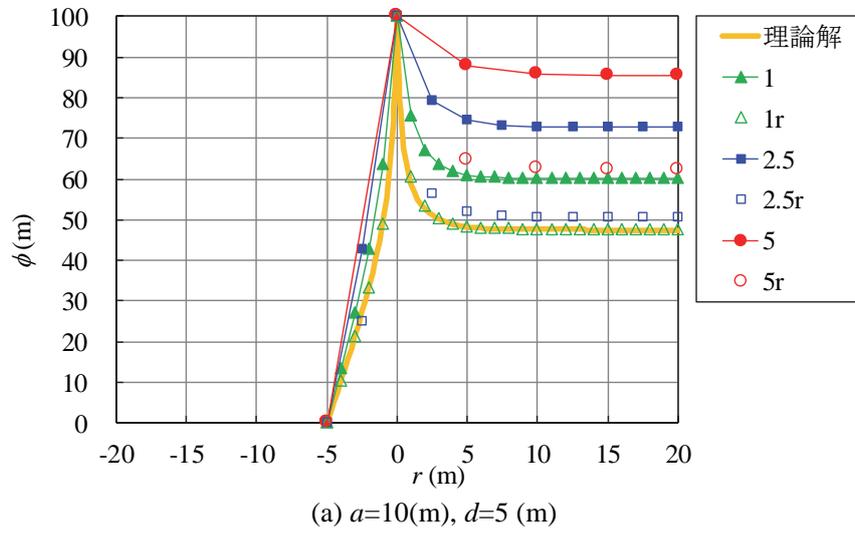


図 3.3-25 全水頭分布の比較（無限配列孔問題， $a=10(\text{m}), d=5(\text{m})$ および  $a=10(\text{m}), d=10(\text{m})$ ）

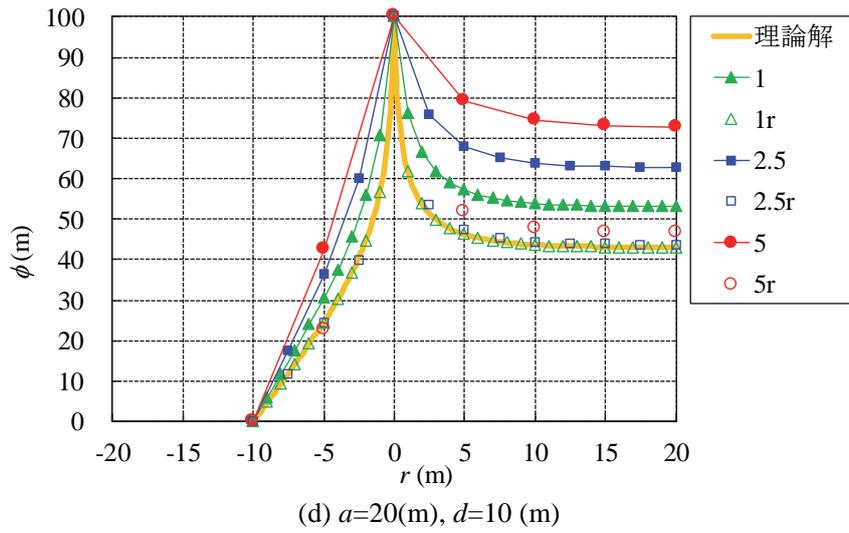
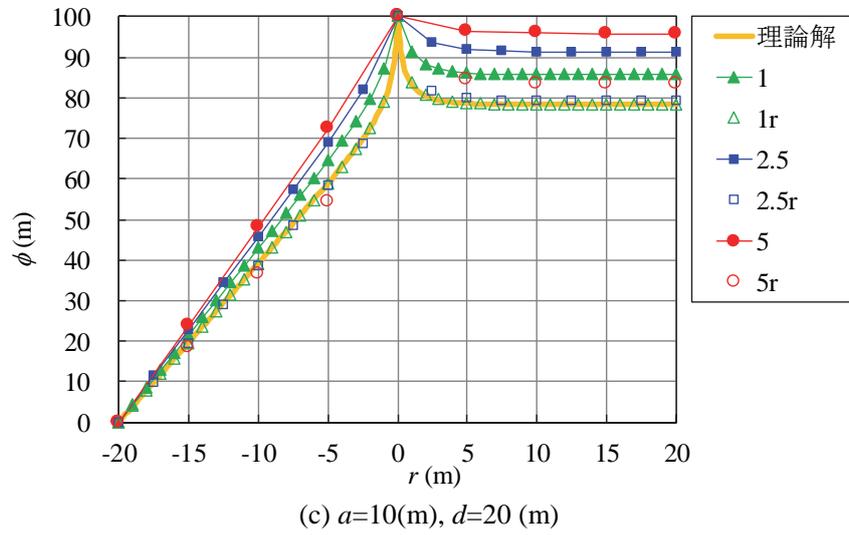


図 3.3-26 全水頭分布の比較 (無限配列孔問題,  $a=10(\text{m}), d=20(\text{m})$  および  $a=20(\text{m}), d=10(\text{m})$ )

## (5) 適用性の評価

本項では、直線定圧境界近傍に配置された注水孔の問題に、二次元放射状流の理論解から導出した補正式を用いるモデル化の適用性を数値実験により評価した。その結果、孔の流量、全水頭分布ともに大幅な精度の向上を可能とする見通しが得られた。ただし、補正式の適用性については、直線定圧境界からの距離、孔の離間距離および孔の実径などが解に及ぼす影響や孔間の圧力相互干渉が著しく生じるようなケースについてのさらなる検証が必要であると考えられる。

### 3.3.4 直線定圧境界近傍の群孔問題におけるモデル性能の検証

前項で述べた河川近傍の群孔問題を対象として、要素分割の細分化に伴う収束性と解の精度に着目したコード検証を試行した。対象とする問題の理論解は前項にて整理したとおりである。

#### (1) 解析モデル

解析モデルは前項で示した図 3.3-16 (a)～(c)である。問題の対称性を考慮して、図 3.3-16 (a)および図 3.3-16 (b)の問題では領域の半分のみをモデル化し、図 3.3-16 (c)の無限配列孔問題では1孔のみをモデル化した。すべての解析モデルの奥行き方向は単位長さの1要素であり、解析領域は単一形状の6節点五面体一次要素を用いて一様に分割した。注水孔の実半径  $r_w$  は0.05mとし、境界条件として  $\hat{\phi}_w = 100\text{m}$  を与えた。直線定圧境界には  $\hat{\phi}_b = 0\text{m}$  を与え、その他の境界は注水孔から十分離れた位置として100mの距離に設定し、不透水境界とした。解析領域の透水係数  $k$  は補正值が分かりやすいように  $1.0 \times 10^{-6}\text{m/s}$  とした。

注水孔は図 3.3-16 (a)～(c)中の青色の節点における点源で表し、2種のモデル化を行った。①補正点源モデル：点源を含む濃い灰色の要素の透水係数を、式(2.5-9)を用いて補正したモデル、②未補正点源モデル：点源を含む要素の透水係数を補正していないモデルである。

## (2) 解析ケース

図 3.3-16 (a)~(c)の三つの解析モデルにおいて、要素サイズの変化、および、定圧境界と群孔の影響に関する検討を行った。表 3.3-7 に解析ケースを整理しなおしたものを示す。要素サイズは 6 節点五面体一次要素の直角二等辺三角形の短辺の長さ  $r_e$  を 1, 2.5, 5m に変化させた 3 種のケースを設定した。また、直線定圧境界から注水孔までの距離  $d$  は 5, 10, 20m の 3 種のケースを設定し、孔間距離  $a$  は 10, 20m の 2 種のケースを設定した。相当半径の補正を行うケースでは、補正式(2.5-9)から求めた補正係数  $\tilde{k}/k$  を元の透水係数  $k=1.0 \times 10^{-6} \text{m/s}$  に乗じることによって透水係数を与えた。

表 3.3-7 収束性と解の精度評価試行のための解析ケース（直線定圧境界近傍の群孔問題）

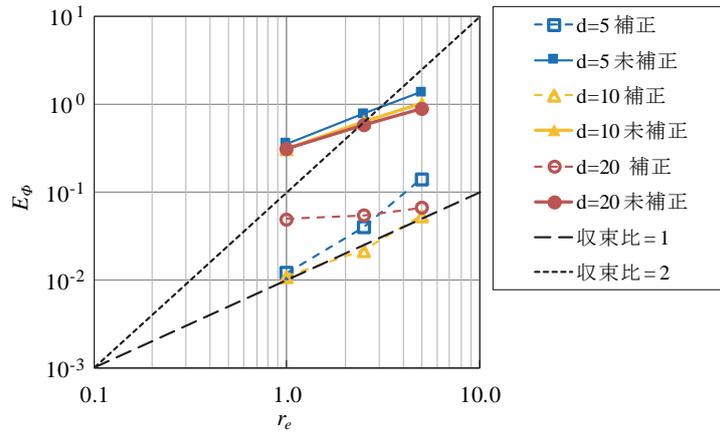
解析モデル	要素サイズ $r_e$ (m)	相当半径 $\tilde{r}_w$ (m)	点源要素透水係数の補正係数 $\tilde{k}/k$	定圧境界からの距離 $d$ (m)	孔間距離 $a$ (m)
補正点源モデル	1	0.20788 $\neq r_w$	0.52434	5, 10, 20	10, 20
	2.5	0.51970 $\neq r_w$	0.40153		
	5	1.03940 $\neq r_w$	0.34109		
未補正点源モデル	1	0.20788 $\neq r_w$	1.0		
	2.5	0.51970 $\neq r_w$	1.0		
	5	1.03940 $\neq r_w$	1.0		

## (3) 検証結果

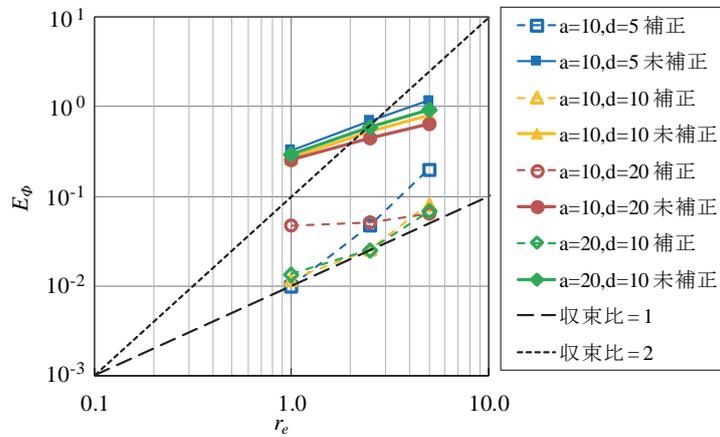
図 3.3-27は、要素サイズ  $r_e$  と全水頭の誤差指標  $E_\phi$  の関係、図 3.3-28は、要素サイズ  $r_e$  と流量の誤差指標  $E_Q$  の関係である。誤差指標の算出方法は3.2.4 項と同様として、式(3.2-3)および式(3.2-4)を用いた。ただし、全水頭の誤差指標  $E_\phi$  の算出に当たっては、図 3.3-16 (a)~(c)に緑色の実線で示す矩形領域内を誤差評価対象領域とし、領域は各孔の中心から  $x, y$  方向にそれぞれ距離  $d$  までの範囲として設定した。式(3.2-3)の評価対象となる節点集合  $\tilde{N}$  は誤差評価対象領域内の節点のうち、全水頭が規定される節点を除いたものとした。

図 3.3-27と図 3.3-28の各図において、白抜きシンボルの3本の線が補正点源モデルの結

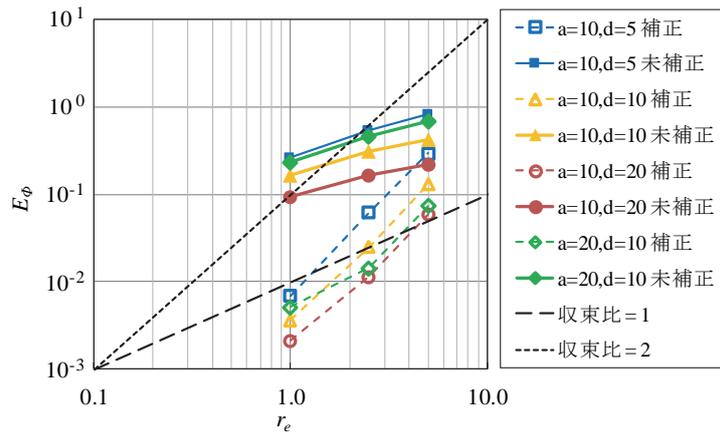
果, 塗り潰しシンボルの3本の線が未補正点源モデルの結果群である. 参考として, 収束比が1と2の傾きを2本の破線で示した.



(a) 単孔問題

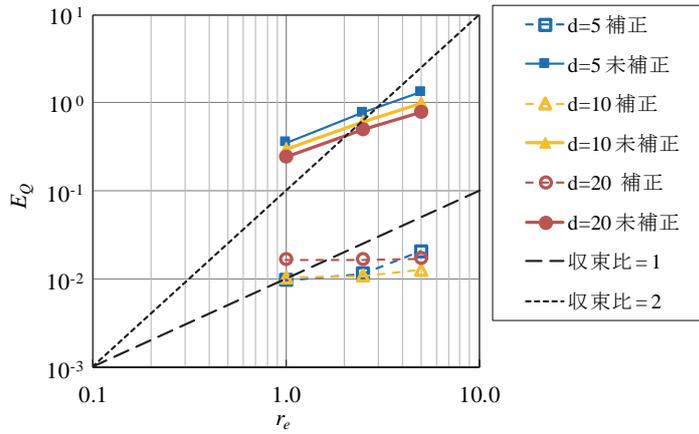


(b) 二孔問題

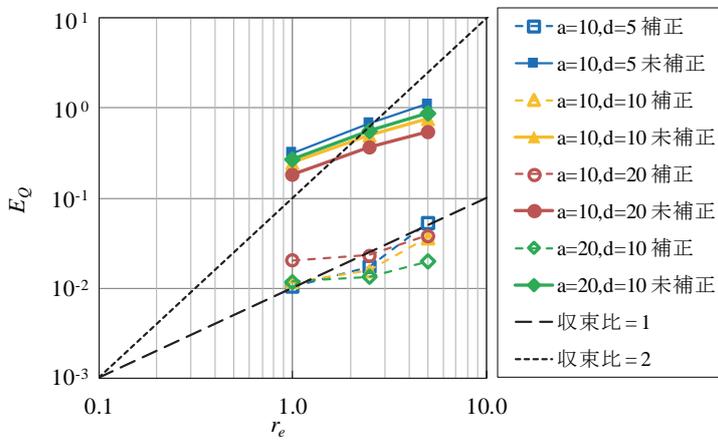


(c) 無限配列孔問題

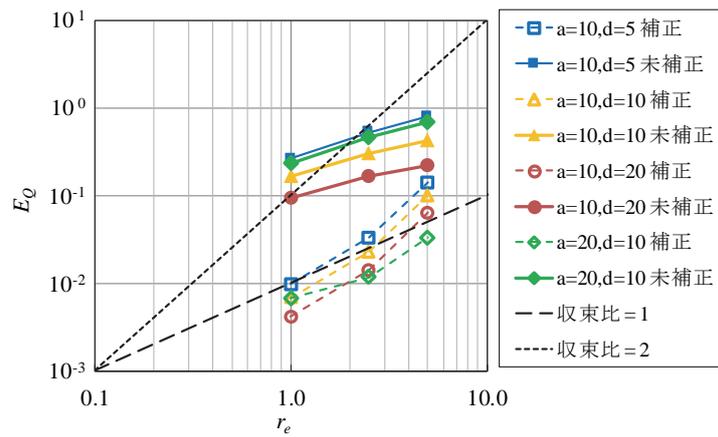
図 3.3-27 理論解に対する誤差 (全水頭)



(a) 単孔問題



(b) 二孔問題



(c) 無限配列孔問題

図 3.3-28 理論解に対する誤差 (流量)

(i) 各モデルの要素分割の細分化に伴う収束性

まず、補正点源モデルの収束比について考察する。図 3.3-27と図 3.3-28の各図から観測される収束比は、図 3.3-27(a),(b)の $d=20\text{m}$ の $E_\phi$ を除き、 $E_\phi$ と $E_Q$ ともに単孔問題、二孔問題、無限配列孔問題の順に大きくなる結果となった。複数孔の場合、孔間の要素サイズが大きいケースでは孔間圧力の相互干渉領域まで補正が及んでしまうため、精度の劣化が認められる。しかし、孔間の要素サイズが小さいケースでは、補正する領域が孔近傍に限られることから、孔近傍の流動場は補正式を導出した軸対称問題に近くなり、精度は改善される。群孔問題の収束比が大きいのはそのためと考察できる。

また、図 3.3-27(a),(b)の $d=20\text{m}$ のケースにおいて、補正点源モデルの収束比が小さくなるのは、誤差評価対象領域の影響と考えられる。その理由を単孔問題の $d=20$ における、理論解と補正点源モデルの解析結果との全水頭差分を誤差とした、図 3.3-29のコンタを用いて説明する。図より、誤差の $x$ 方向の変化は、直線定圧境界の影響を受けて小さいことがわかる。したがって、 $x$ 方向の誤差評価対象領域 $d$ が大きくなっても、収束比に影響しない節点が増えるため、式(3.2-3)の誤差指標に与える影響は小さいと考えられる。これは、図 3.3-27(c)の $d=20\text{m}$ のケースでは、解析モデルの $x$ 方向の領域が孔間隔 $a$ で拘束されるため、収束比は $d$ の増大の影響を受けないことからわかる。すなわち、コード検証では誤差評価対象領域の設定に注意して、結果の考察を行う必要がある。

次に、未補正点源モデルの収束比について考察する。図 3.3-27 と図 3.3-28 の各図から観測される収束比は、 $E_\phi$ と $E_Q$ ともに単孔問題および二孔問題では概ね 1 程度、無限配列孔問題では 0.5 程度となり、収束比を観測することができた。これは、前項の検証において点源の要素サイズを一定としていた場合とは異なり、点源を含む要素の相当半径がメッシュの細分化によって孔の実半径に近づくためと考えられる。

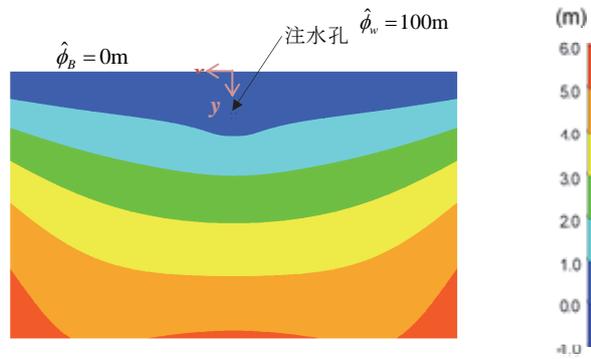


図 3.3-29 理論解と補正点源モデル解析解の全水頭差分コンタ（単孔問題  $d=20$ ）

(ii) モデル化の違いによる正確さの比較

図 3.3-27 の  $E_\phi$  および図 3.3-28 の  $E_Q$  について、2 種の点源モデルの解の精度を比較すると、補正点源モデルの方が未補正点源モデルより高精度の解が得られた。提案するモデル化は式(2.5-9)に示す二次元放射状流の単一孔問題の理論解に基づくものであるが、より一般的な注水／揚水問題に対しても適用できる見通しを得た。

### 3.3.5 二次元群孔問題に関するまとめ

本節では、単一孔の理論解から導出した補正式を用いるモデル化を、群孔問題へ適用する場合の適用性を評価することを目的として、数値実験を実施した。また、均質な被圧帯水層を対象とした数値解析だけでなく、より現実的な不均質な地層分布を想定したケースについての数値実験の結果も示した。得られた知見を以下に列挙する。

- a. 地盤の透水性を均質とした円形領域にある群孔問題において、点源の相当半径を補正しない従来のモデル化に比べ、補正式を適用して相当半径を補正したモデル化は点源の要素サイズに依らず高い精度の解を与える。
- b. 不均質な透水性の円形領域にある群孔問題においても、点源の相当半径を補正しない従来のモデル化に比べ、補正を行ったモデル化は点源周辺の要素サイズに依らず高い精度の解を与える。
- c. より現実的な問題として、河川などを想定した直線定圧境界近傍の群孔問題においても、補正式を用いるモデル化を適用することにより、従来のモデル化に比べて精度の良い解析結果を得ることができる。

群孔問題においても本研究が提案する補正式を用いた点源によるモデル化は、従来のモデル化と比較して、解析精度の向上が認められた。ただし、提案するモデル化の適用に際しては、直線定圧供給源からの距離、孔の離間距離および孔の実径などが解に及ぼす影響や孔間の圧力相互干渉の影響を確認した上で行う必要があると考えられる。

また、線状の定圧境界近傍にある群孔問題を対象として、数値実験により得られた要素分割の細分化に伴う収束性および解の精度に着目したモデル性能の検証も試行した。ここでは、点源の要素サイズを変化させた検証を行い、提案するモデル化の適用性を示しただけでなく、実務においてコード検証を実施する際の留意点を顕在化させることができた。得られた知見を以下に列挙する。

- d. 補正点源モデルは、透水係数の補正を孔のごく近傍に限定することにより、圧力規定境界や孔同士の干渉が生じるような問題においても適用可能性のある見通しを得た。
- e. 収束性は、誤差評価対象領域の設け方に左右されることに注意して、コード検証の結果を解釈する必要がある。

### 3.4 三次元単一孔問題

#### 3.4.1 三次元四面体一次要素の補正式の精度検証

注水／揚水孔や井戸の先端部で生じる三次元球状流問題についても，定常浸透流問題を対象として，点源要素透水係数補正式(2.5-17)を用いるモデル化について，精度確認と適用性に関する評価結果を示す．評価は理論解との比較により行った．

##### (1) 解析モデル

図 3.4-1は解析モデルである．問題の点対称性を考慮して点源を中心とした球の1/8の領域について，四面体要素を用いて分割した．解析領域の透水係数 $k$ は補正值が分かりやすいように $1.0 \times 10^{-6} \text{m/s}$ とした．点源としてモデル化する注水点の実半径 $r_w$ は0.05mまたは0.1mとし，全水頭 $\hat{\phi}_w$ として100mを与えた．解析領域の範囲 $R$ は中心から60mとし，領域の境界に全水頭 $\hat{\phi}_r$ として0mを与えた．ここで， $r_w$ は $R$ に比べて小さく， $r_w \ll R$ と見なせるので三次元球状流問題の理論解である式(2.5-13)の $R$ の影響は無視できる．すなわち，流量 $Q$ は次式で近似できる<sup>47)</sup>．

$$Q \cong 4\pi k(\phi_s - \hat{\phi}_w)r_w \quad (3.4-1)$$

式(3.4-1)は $R$ の関数ではないので， $R$ が $r_w$ に比べて十分大きい場合は解析領域の形状は任意と見なせる．単一の孔や井戸を対象としたモデル化では，孔や井戸を中心として円柱状にメッシュ分割を行うのが自然であるため，図 3.4-2 に示すモデルについても検証を行った．これら二つのモデルの解析領域の要素分割は，領域内でほぼ同じサイズの要素になるように行った．特に理論解と比較検証する $r$ 方向の破線 Line-1 および $z$ 方向の破線 Line-2 については要素サイズが等しくなるようにした．

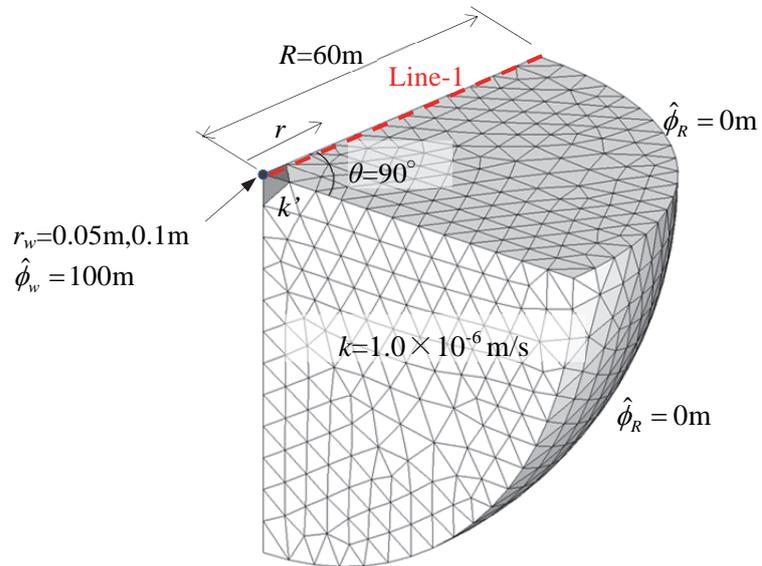


図 3.4-1 球状の解析モデル（三次元球状流問題，均質モデル）

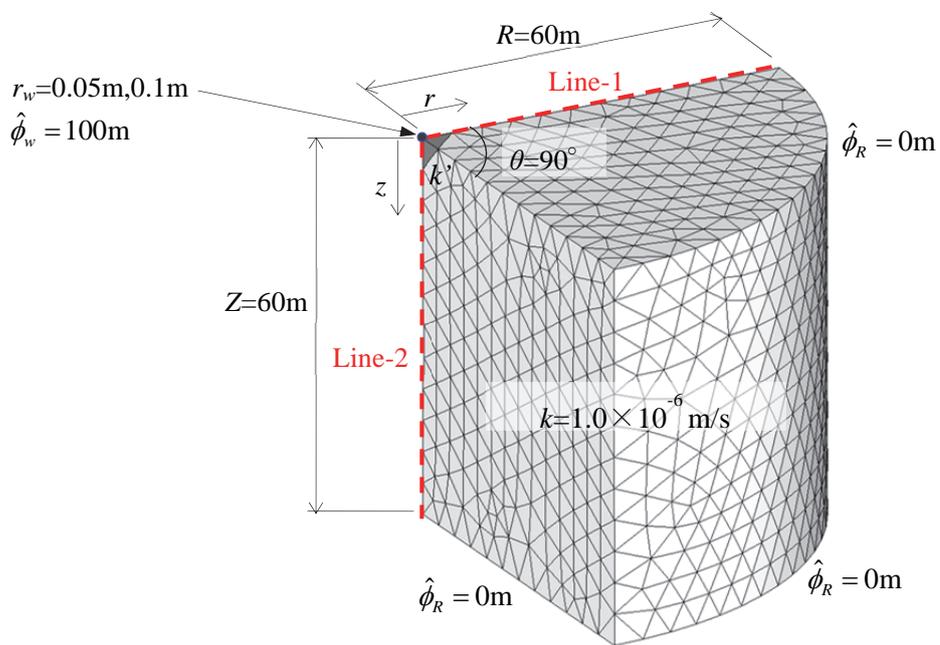


図 3.4-2 円柱の解析モデル（三次元球状流問題，均質モデル）

## (2) 解析ケース

要素サイズ  $r_e$  をパラメータとしたケーススタディを実施した。表 3.4-1に解析ケースを示す。注水点の実半径  $r_w$  が0.05mの場合(a)と0.1mの場合(b)について、点源の相当半径の‘補正なし’のケースと‘補正あり’のケースの検討を行った。‘補正あり’のケースは、図 3.4-1および図 3.4-2において点源を構成節点とする濃い色で示した要素に対して補正式(2.5-17)から導出した透水係数の補正係数  $\tilde{k}/k$  を元の透水係数に乗じることにより与えた。解析領域を円柱状にしたモデルについては、メッシュの粗い  $r_e$  が5mと10mのケースについてのみ解析を行うこととした。

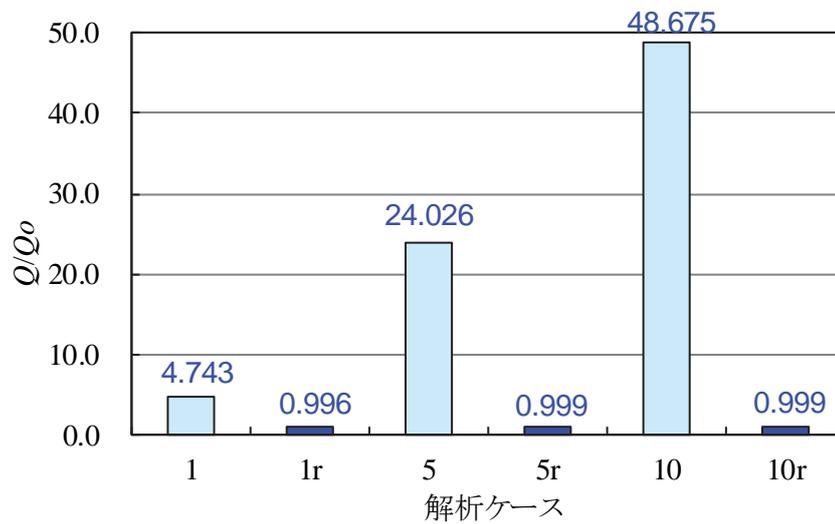
表 3.4-1 解析ケース（三次元球状流問題，均質モデル）

解析モデル	解析ケース	相当半径補正	要素サイズ $r_e$ (m)	点源要素透水係数の補正係数 $\tilde{k}/k$	
				孔実半径 $r_w=0.05$ (m)	孔実半径 $r_w=0.1$ (m)
球状モデル	1	補正なし	1	1.0	1.0
	1r	補正あり	1	0.16535	0.34907
	5	補正なし	5	1.0	1.0
	5r	補正あり	5	0.03173	0.06411
	10	補正なし	10	1.0	1.0
	10r	補正あり	10	0.01579	0.03173
円柱モデル	5-c	補正なし	5	1.0	1.0
	5r-c	補正あり	5	0.03173	0.06411
	10-c	補正なし	10	1.0	1.0
	10r-c	補正あり	10	0.01579	0.03173

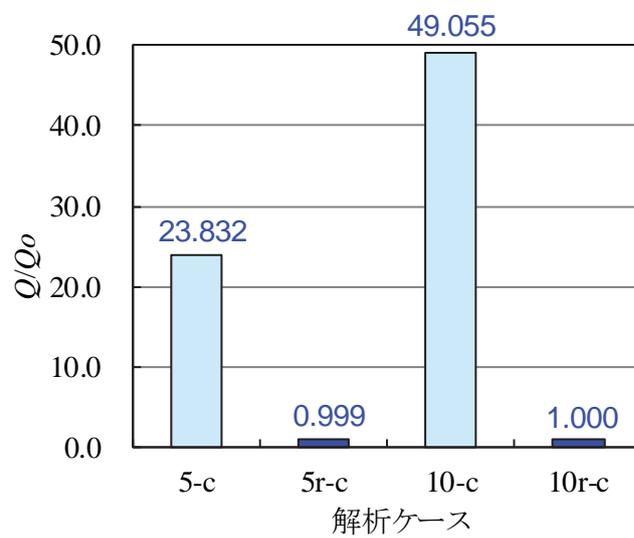
### (3) 解析結果

図 3.4-3～図 3.4-4は式(2.5-13)の理論解 $Q_0$ に対する各ケースの点源流量 $Q$ の比である。解析モデルは点源を中心とした $1/8$ の領域のため、 $Q$ は注水点の全水頭が規定される節点で算出される流量を8倍して算出した。図 3.4-3は $r_w = 0.05\text{m}$ のケース、図 3.4-4は $r_w = 0.1\text{m}$ のケースの結果であり、両図中の(a)は球状モデル、(b)は円柱モデルの解析結果である。両ケースとも、点源の相当半径の‘補正なし’のケースは、二次元放射状流の場合と同様、理論解との差が大きくなる結果となり、‘補正あり’のケースは、要素サイズに因らずに理論解と良い一致を示した。また、円柱モデルと球状モデルの結果は、ほぼ等しい値となったことから、円柱モデルにおいて $R$ が $r_w$ に比べて十分大きい場合には、本手法は任意形状の解析領域に適用可能と考えられる。

図 3.4-5および図 3.4-6に全水頭値の解析結果を示す。図 3.4-5は $r_w = 0.05\text{m}$ のケース、図 3.4-6は $r_w = 0.1\text{m}$ のケースの結果であり、両図中の(a)は球状モデルの解析結果であり、横軸は、図 3.4-1の赤破線Line-1で示す点源からの距離 $r$ である。また、(b)は円柱モデルの解析結果であり、横軸は、図 3.4-2の赤破線Line-1およびLine-2で示す点源からの距離 $r$ および $z$ である。薄い太線が式(2.5-14)の理論解、塗りつぶしのマーカーは点源の相当半径の‘補正なし’の解析結果、白抜きのマーカーは点源の‘補正あり’の解析結果である。三次元球状流の理論解は注水点近傍に動水勾配が集中しており、‘補正なし’のケースの誤差も注水点近傍で大きい。また、要素サイズが大きくなるにしたがって理論解との差も大きくなる。注水点の半径 $r_w = 0.05\text{m}$ のモデルで要素サイズ $r_e$ を $10\text{m}$ とした場合、注水点からの距離 $r=10\text{m}$ で理論解との水頭差は $20\text{m}$ 以上となった。一方、‘補正あり’のケースは要素サイズに関わらず理論解と良好な一致を示した。

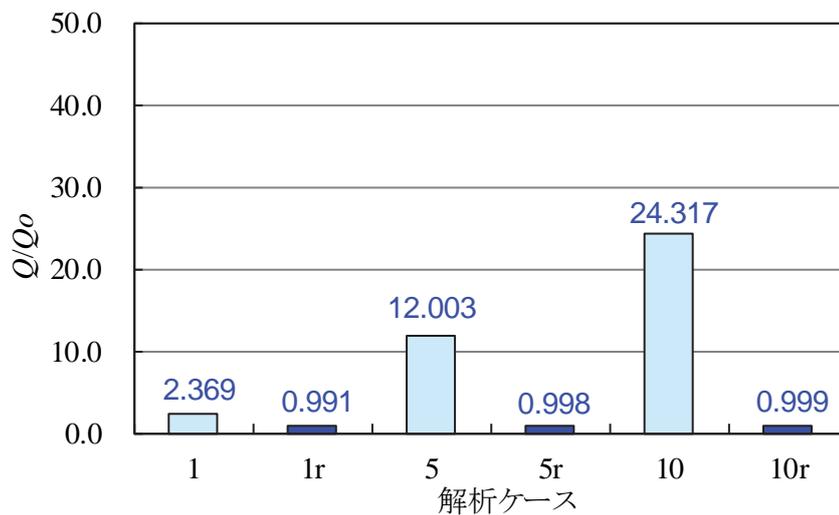


(a) 球状モデル

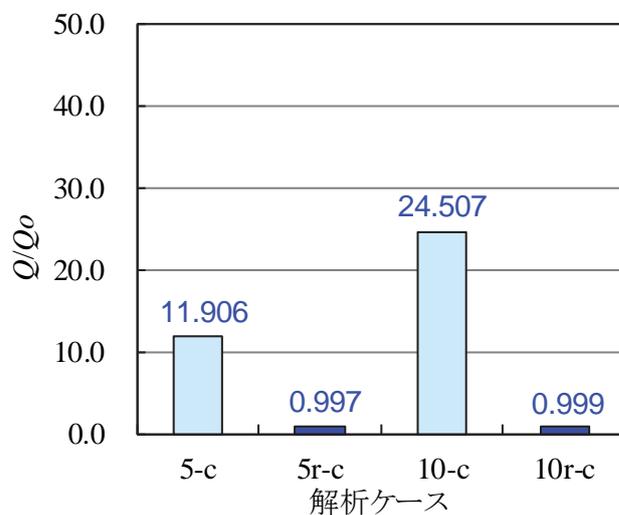


(b) 円柱モデル

図 3.4-3 理論解  $Q_0$  に対する流量比の比較（三次元球状流問題，均質モデル，注水点実半径  $r_w=0.05m$ ）

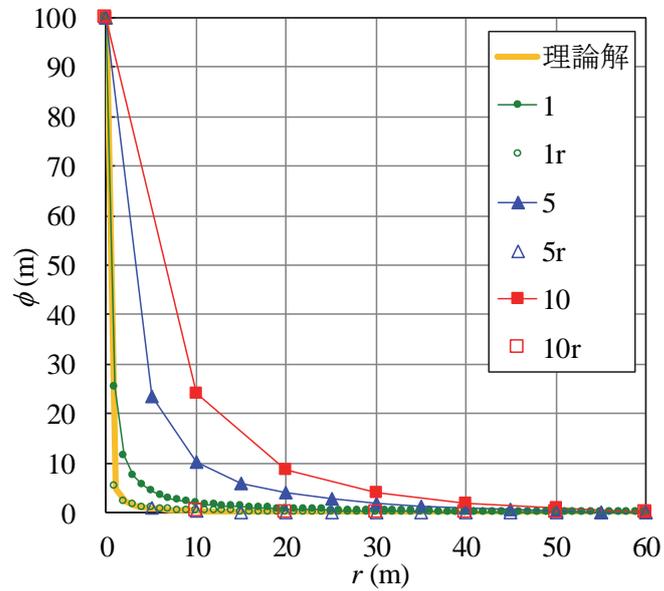


(a) 球状モデル

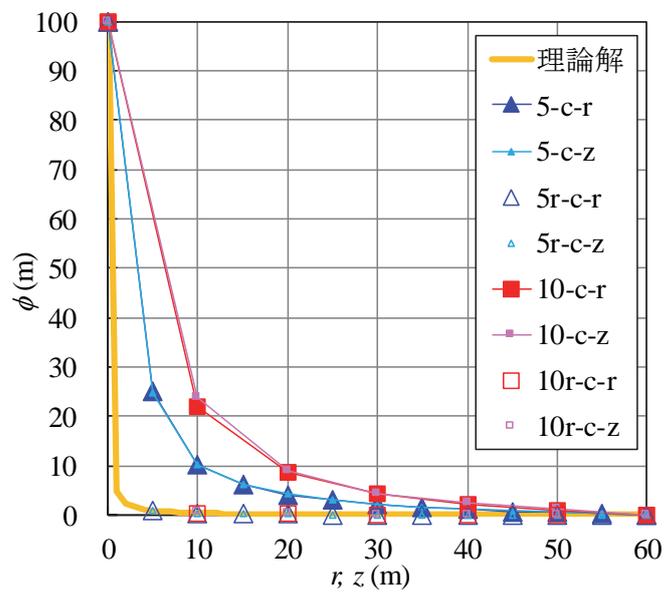


(b) 円柱モデル

図 3.4-4 理論解  $Q_0$  に対する流量比の比較（三次元球状流問題，均質モデル，注水点実半径  $r_w=0.1m$ ）

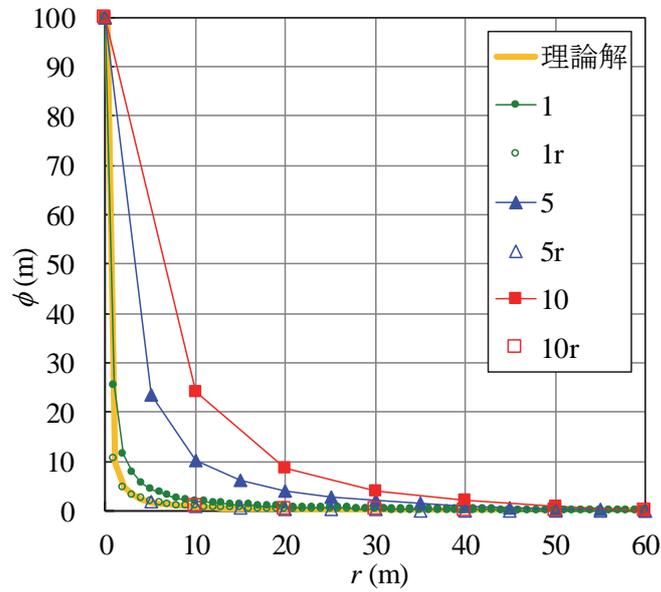


(a) 球状モデル

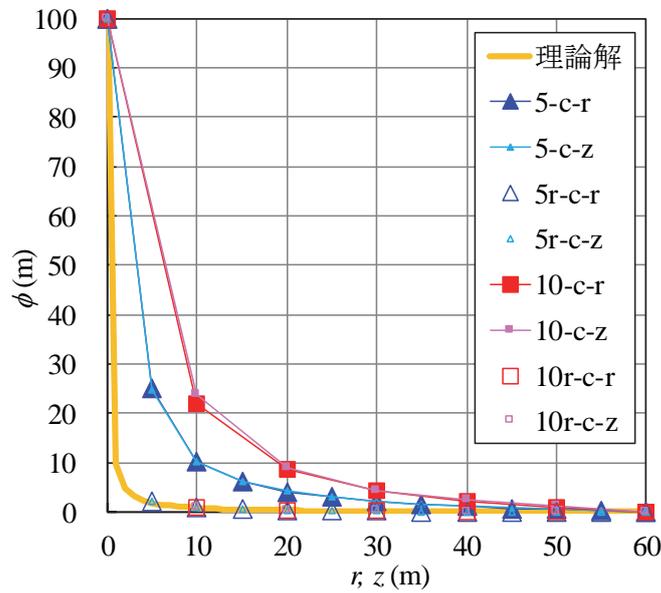


(b) 円柱モデル

図 3.4-5 全水頭分布の比較 (三次元球状流問題, 均質モデル, 注水点実半径  $r_w=0.05\text{m}$ )



(a) 球状モデル



(b) 円柱モデル

図 3.4-6 全水頭分布の比較(三次元球状流問題, 均質モデル, 注水点実半径  $r_w=0.1\text{m}$ )

#### (4) 補正式の精度の評価

三次元の理論解から誘導した点源要素透水係数補正式を適用した結果，流量，全水頭分布ともに理論解と良い一致を示し，大幅に精度が向上することを確認できた．本研究が提案する相当半径を補正するモデル化は，三次元問題にも適用できる見通しを得た．

### 3.4.2 不均質地盤を対象として二次元三角形一次要素の補正式および三次元四面体一次要素の補正式を併用する適用性

実際の孔近傍の流れを考えると、図 3.4-7 に示す  $D_1$  に対応する領域では水平方向の流れが卓越し、 $D_2$  の領域では孔先端に向かう三次元的な球状流が卓越すると考えられる。そこで、より現実的な問題での検証を行うため、二次元放射状流の補正式と三次元球状流の補正式を併用した場合のモデル化の検証を行った。

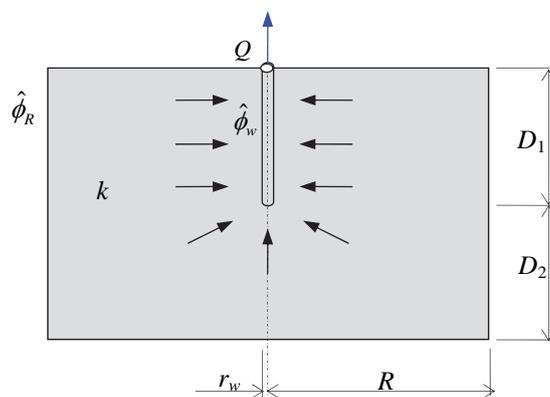


図 3.4-7 孔近傍の地下水流れ

(1) 解析モデル

図 3.4-8は解析モデルである．図中の青線で示す単一の注水孔を中心とした円柱領域の1/4であり， $D_1$ の領域では6節点五面体要素， $D_2$ の領域では4節点四面体要素によりメッシュ分割した．注水孔の実半径  $r_w$  を0.05mとした．注水孔は点源の集合としてモデル化し，全水頭  $\hat{\phi}_w$  として100mを与えた．解析領域の範囲  $R$  は60mとし，領域の境界に全水頭  $\hat{\phi}_R$  として0mを与えた．また，解析領域を三つの地層に分け，それぞれ異なる透水係数  $k_1 \sim k_3$  を設定した．

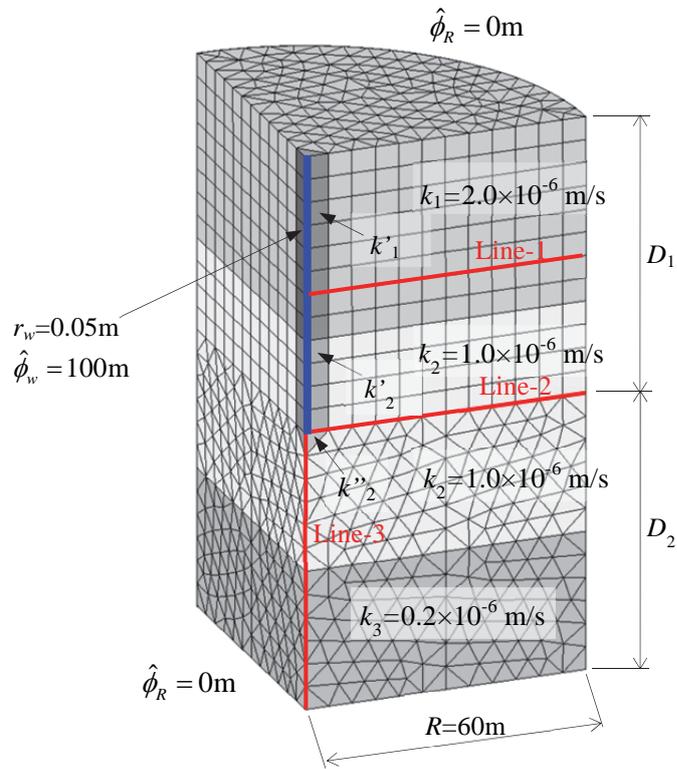


図 3.4-8 解析モデル（三次元単一孔問題，不均質モデル）

## (2) 解析ケース

検証のために注水孔を実寸法でメッシュ分割し、孔近傍に0.01mの極小サイズの要素を用い、領域境界には1.0mの要素を用いた細かいメッシュによる参照解を用意した。点源の相当半径を補正しない場合と補正する場合の解析結果について、参照解と比較するケーススタディを実施した。表 3.4-2に解析ケースを示す。‘補正あり’のケースは、図 3.4-8の注水孔に対応する節点が属する要素の透水係数の補正を行った。 $D_1$ の領域にある要素透水係数 $k'_1$ および $k'_2$ については、水平方向の流れが卓越すると考えられるため、二次元放射状流の補正式(2.5-9)から算出した補正係数 $k'_1/k_1$ および $k'_2/k_2$ を元の透水係数に乗じて与えた。また、 $D_2$ の領域にある注水孔先端部の要素透水係数 $k''_2$ については、三次元球状流が卓越すると考え、補正式(2.5-17)から算出した補正係数 $k''_2/k_2$ を用いて透水係数を与えた。

表 3.4-2 解析ケース（三次元単一孔問題，不均質モデル）

解析ケース	相当半径補正	要素サイズ $r_e$ (m)	点源要素透水係数の補正係数	
			$k'_1/k_1, k'_2/k_2$	$k''_2/k_2$
参照解	補正なし (注水孔メッシュ分割)	0.01~1	1.0	1.0
5	補正なし	5	1.0	1.0
5r	補正あり	5	0.34109	0.03173
10	補正なし	10	1.0	1.0
10r	補正あり	10	0.29647	0.01579

## (3) 解析結果

注水孔の流量について、参照解 $Q_r$ に対する各ケースの解析値である点源総流量 $Q$ の比を図 3.4-9に示す。本解析においても、点源の相当半径の補正を行った結果は要素サイズに因らずに理論解と良い一致を示し、補正を行わないケースに対する優位性は明らかとなった。3.2.1 の二次元放射状流問題や、3.4.1 の三次元球状流問題の解析結果と比較すると、

やや精度が劣る結果となったが、参照解と良い一致を示したと言えよう。実際の注水孔先端部の流れは図 3.4-7に示す領域 $D_1$ と $D_2$ の境界付近において、二次元放射状流から三次元球状流へ漸移していくと考えられるが、本モデルではこの流れの漸移部を考慮せずに $D_1$ の二次元流領域と $D_2$ の三次元流領域とに区分して各補正式を適用している。解析精度は流れの漸移部の影響を受けるとは考えられるが、その影響は大きなものではなく、二次元放射状流および三次元球状流が卓越すると想定した要素に、それぞれの流れ場に対応する補正式を適用することは有効なモデル化であると考えられる。

図 3.4-10に全水頭値の解析結果を示す。横軸は、図 3.4-8に赤線で示したLine-1～Line-3上の孔中心からの距離 $r$ である。黄色の太線が参照解、塗りつぶしのマーカーは‘補正なし’の解析結果、白抜きのマーカーは‘補正あり’の解析結果である。不均質な地層を想定した解析モデルの全水頭分布においても、二つの補正式を併用した結果は参照解と良好な一致を示した。

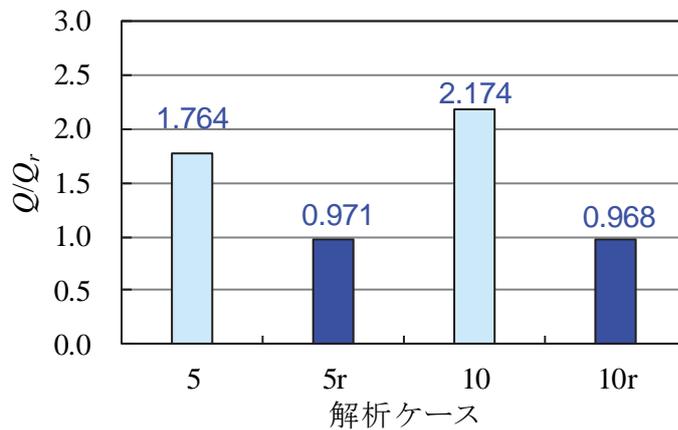
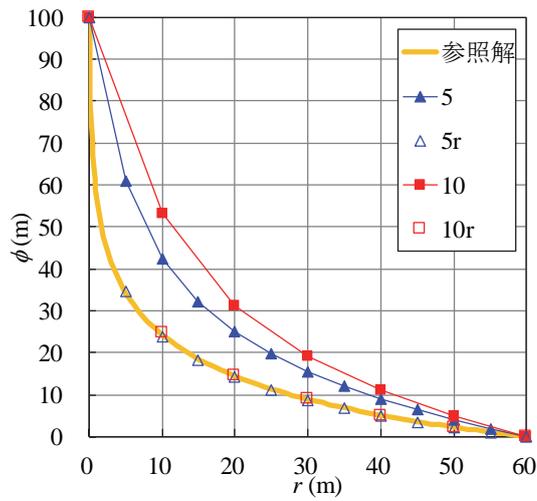
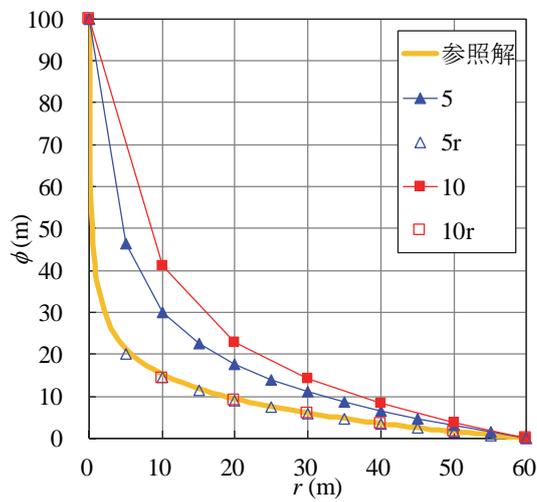


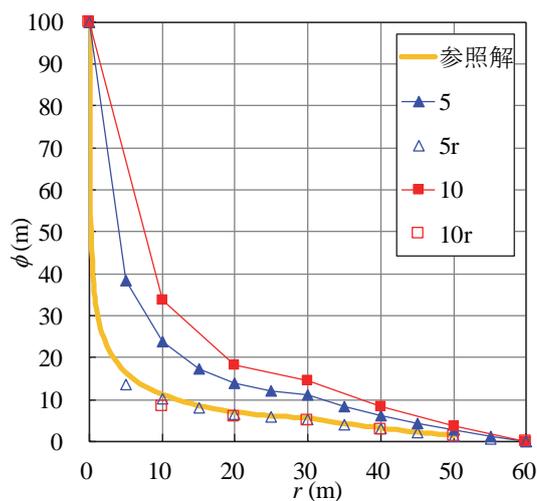
図 3.4-9 参照解  $Q_r$  に対する流量比の比較（三次元単一孔問題、不均質モデル）



(a) Line-1



(b) Line-2



(c) Line-3

図 3.4-10 全水頭分布の比較 (三次元単一孔問題, 不均質モデル)

#### (4) 補正式の適用性評価

実際の孔近傍の流れを考慮し、提案する二次元放射状流の補正式と三次元球状流の補正式を併用したモデル化に関する適用性評価を実施した。今回の検討は不均質な透水性の地盤を対象としたものであるが、均質な条件を対象とした理論解から導出した二つの補正式を併用した結果、流量、全水頭分布ともに詳細メッシュによる参照解と良い一致を示し、大幅に精度が向上することを確認できた。

### 3.4.3 三次元単一孔問題に関するまとめ

本節では，提案する点源を用いたモデル化の三次元問題への適用性について数値実験による評価を行った．数値実験は，均質な被圧帯水層を対象とした問題だけでなく，より現実的な不均質な地層分布を想定した問題についての数値実験の結果も示した．得られた知見を以下に列挙する．

- a. 三次元球状流の単一注水点問題において，相当半径を補正するモデル化は，点源の要素サイズに依存せずに従来のモデル化と比較して大幅に精度を改善させる．
- b. より現実的な不均質な透水性の地層分布，かつ二次元放射状流と三次元球状流が混在した解析モデルにおいても，二つの補正式を併用することにより，透水性の変化による地下水流動場の特徴を的確に捉えた精度の良い解析結果を得ることができる．

### 3.5 本章のまとめ

以下に本章の内容をまとめる.

- V&V の観点からのコード検証について概説した.
- 補正式を導出した理論解の問題に加えて, 地盤を不均質とした問題, 群孔問題, 三次元の流れ場が生じる問題を対象とした数値実験により, 提案するモデル化の精度の確認と適用性の評価を行った.
- 孔の流量や全水頭分布に関する理論解や参照解との比較により, 提案するモデル化は従来の未補正のモデル化よりも大幅に精度を改善できることを明示した.
- 解の収束性と精度に関する観測により, 提案するモデル化を含む, 四つのモデル化に関するモデル性能の検証結果を示した.
- 提案するモデル化と, 点源の相当半径が孔の実半径と等価になるように点源の要素サイズを設定したモデル化は, 全水頭の収束比が理論的に期待される値を示すことから, 所期のモデル性能を確認できた. また, 同じ要素サイズであれば, 提案するモデル化は最も精度の高い結果が得られることを示した.
- 点源を用いた従来の未補正のモデル化は, 明確な収束性が観測できなかったことを示した.
- 上記の結果により, 提案するモデル化の実問題への適用の見通しを得た.

## 第4章 解検証

### 4.1 V&Vの観点からの解検証

本章では、本研究で提案するモデル化について解検証を試行し、結果を述べる。ASME V&V10<sup>15), 21)</sup>に代表されるV&V (Verification & Validation : 検証と妥当性確認) では、検証をコード検証と解析検証の2段階に分けている。コード検証は前章で述べた通り、計算モデルに誤りがないこと、および、採用した数値アルゴリズムが所期の性能を発揮することを確認するプロセスである。一方、解析検証では、入出力データなどの扱いと図化等について人為的な誤りがないことの確認に加え、時間・空間に関する離散化誤差や繰り返し計算の収束誤差などの数値誤差の定量的な推定により、誤差が妥当性確認の要件に対して十分小さいことを検証する。1.3.3 で述べたように、本研究は人為的な誤りがないことを前提として、解析検証と明確に区別するため解検証 (Solution Verification)<sup>46)</sup>として数値誤差の評価に限定した検証を試行した結果を報告する。

コード検証では、解が得られている理論解などが存在する問題を対象とするのに対し、解検証では、着目する実際の問題が対象となる。本研究では、実務におけるV&Vを想定し、河川のような線状の圧力規定境界の近傍に複数の注水／揚水孔が配置された問題を対象とした。補正のない従来のモデル化についても併せて検証を行い、提案するモデル化の優位性を明示するとともに、モデル化の違いによる検証結果の特性を明示し、解検証の重要性および実施時の留意点も述べる。

#### 4.1.1 GCI を用いた収束解および誤差範囲の推定による解検証

本研究の解検証では，空間に関する離散化誤差の定量的な推定により，誤差の評価を行う．空間方向の離散化誤差の推定には，粗さの異なる複数のメッシュの解析解から求める格子収束指数（Grid Convergence Index，以下 GCI）を用いる手法がある．ここでは，この GCI を用いて提案モデルの解検証を試行した結果を示す．

##### (1) GCI を用いた収束解および誤差範囲の推定

解検証として以下に示す格子収束指数（Grid Convergence Index，以下 GCI）<sup>16), 39)</sup>を求め，空間方向の誤差および誤差範囲の推定を試行した．

GCI は要素細分化に伴う解の収束性から Richardson 補外を用いて求める．まず，厳密解を要素サイズ  $h$  のメッシュを用いた解析結果  $w_h$  を用いて次式で表す．

$$w_{\text{exact}} = w_h + Ah^p + \text{H.O.T. as } h \rightarrow 0 \quad (4.1-1)$$

ここに， $A$  は定数， $p$  は解の正確度のオーダー（order of accuracy）であり，H.O.T は高次の項（Higher order terms）である．式(4.1-1)により，三つの要素サイズ  $\Delta r_1$ ， $\Delta r_2$ ， $\Delta r_3$  ( $\Delta r_1 < \Delta r_2 < \Delta r_3$ ) のメッシュを用いて得られる解を  $w_1$ ， $w_2$ ， $w_3$  とすると，次式が得られる．

$$\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{\Delta r_1^p - \Delta r_2^p}{\Delta r_2^p - \Delta r_3^p} \quad (4.1-2)$$

式(4.1-2)からニュートン法などにより  $p$  を求めると，厳密解に対応する収束解 ( $w_{\text{exact}}$ )<sub>RE</sub> は次式で推定できる．

$$(w_{\text{exact}})_{\text{RE}} = w_1 + \frac{\varepsilon}{(\Delta r_2/\Delta r_1)^p - 1} w_1 \quad (4.1-3)$$

$$\varepsilon = \frac{w_1 - w_2}{w_1} \quad (4.1-4)$$

GCI は次式により算出される.

$$\text{GCI} = F_s \frac{|\varepsilon|}{(\Delta r_2 / \Delta r_1)^p - 1} \quad (4.1-5)$$

Roache は多くの数値実験から、三つの要素サイズの解析結果を用いた GCI の場合、式 (4.1-5) の安全係数  $F_s$  に 1.25 を用いることを推奨している<sup>39)</sup>.

最も細かいメッシュの解  $w_1$  の誤差範囲  $B_{w_1}$  は次式で表すことができ、 $B_{w_1}$  は誤差の標準偏差の 2 倍 ( $2\sigma$ ) に対応する<sup>15), 16)</sup>.

$$B_{w_1} = w_1 (1 \pm \text{GCI}) \quad (4.1-6)$$

## 4.2 解検証の試行

### 4.2.1 線状定圧境界近傍の群孔問題における誤差の推定と離散化の検証

2.5 節で提案したモデル化を一般的な問題に適用することを想定し、3.3.3 で対象とした河川近傍の群孔問題を対象として解検証を試行した。

#### (1) 解析モデル

解析モデルは単孔問題、二孔問題、および無限配列問題に対して各々作成した。解析モデルは、図 3.3-16に示したものをを用いる。問題の対称性を考慮して、単孔問題および二孔問題では領域の半分のみをモデル化し、無限配列孔問題では1孔のみをモデル化した。すべての解析モデルの奥行き方向は単位長さの1要素であり、解析領域は単一形状の6節点五面体一次要素を用いて一様に分割した。注水孔の実半径  $r_w$  は0.05mとし、境界条件として  $\hat{\phi}_w = 100\text{m}$  を与えた。直線定圧境界には  $\hat{\phi}_B = 0\text{m}$  を与え、その他の境界は注水孔から十分離れた位置として100mの距離に設定し、不透水境界とした。

注水孔は点源で表し、2種のモデル化を行った。①補正点源モデル：点源を含む要素（例えば、図 3.3-16の濃い灰色の要素）の透水係数を、式(2.5-9)を用いて補正したモデル、②未補正点源モデル：点源を含む要素の透水係数を補正していないモデルである。

#### (2) 解析ケース

単孔問題、二孔問題、および無限配列問題の各解析モデルにおいて、要素サイズの変化、および、定圧境界と群孔の影響に関する検討を行った。表 3.3-7に解析ケースを示す。要素サイズは6節点五面体一次要素の直角二等辺三角形の短辺の長さ  $r_e$  を1, 2.5, 5mに変化させた3種のケースを設定した。また、直線定圧境界から注水孔までの距離  $d$  は5, 10, 20mの3種のケースを設定し、孔間距離  $a$  は10, 20mの2種のケースを設定した。

#### (3) 検証結果

解検証は、表 3.3-7の全ての解析ケースの結果について実施した。検証対象は、全水頭および注水孔の流量とし、このうち全水頭に関しては、注水孔からy方向に+10m離れた位

置  $x=0, y=d+10$  (図中の緑の点) における解に着目した。検証結果として、図 4.2-1～図 4.2-10を示す。

図中、式(4.1-2)から求めた観測された解の正確度のオーダー  $p$ 、および、式(4.1-5)から算出した格子収束指数GCIを記す。図中、○は各メッシュによる解析結果、×は式(4.1-3)により推定される収束解であり、青と赤の色分けは、それぞれ補正点源モデル、未補正点源モデルに対応する。最も小さい要素サイズ  $r_e=1\text{m}$ の解については、式(4.1-6)から推定される誤差範囲  $B_w$  も図示している。橙の△は理論解である。ここで、実務における解検証では、理論解などの厳密解が存在することは極めて稀であるため、厳密解が分からない問題に対して離散化誤差の推定を行うが、ここでは、解検証の有効性および留意点を確認するため、理論解との比較も行う。

両図より、全水頭および流量ともに、補正点源モデルの結果は  $p$  が1.8以上となり、推定された誤差範囲はごく狭い幅を示すことが確認できた。また、推定した収束解も理論解に非常に近い値となった。実務では、理論解などの厳密解が存在することは極めて稀であるため、解の離散化誤差を定量的に推定できるGCIのような方法が解検証において非常に重要になる。

一方、未補正点源モデルの結果は、全水頭および流量ともに  $p$  は1.0未満となった。推定される誤差範囲は補正点源モデルと比べると極めて大きく、収束解も理論解と大きく乖離している。離散化誤差の推定の信頼性のためには、三つのメッシュによる解がメッシュサイズの変化に対して漸近領域 (asymptotic range) にあることが、正確な推定を行う上での前提となる。具体的には、収束解の外挿推定のためには、 $p$  は0.5以上を満足すべきであり、 $p$  がゼロに近づくと誤差範囲の大きさは限度無しに増大することが既往文献で示されている<sup>40)</sup>。未補正点源モデルでは、最小の  $p$  が0.04程度、最大の  $p$  でも0.8程度であり、GCIによる収束解や誤差範囲の推定が適切に行えていないことが分かる。これは、本論文での検証問題に限らず、実問題においても同様になると考えている。

解検証を行う際には、要素サイズの変化に対する解析結果のふるまいに着目し、解が漸近領域にあることを、観測される解の正確度のオーダー等により確認することが重要である。

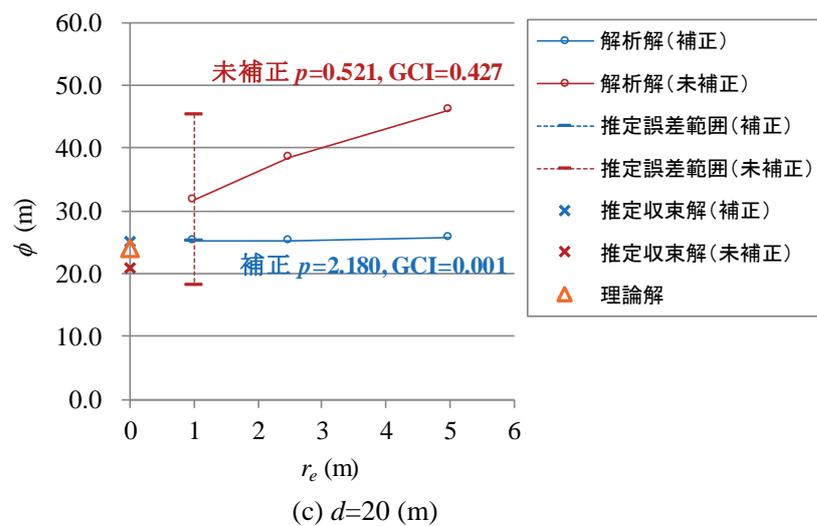
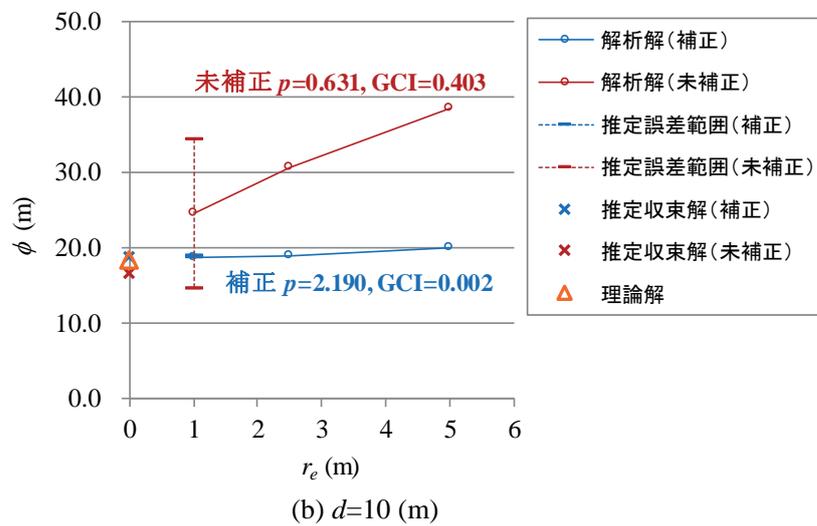
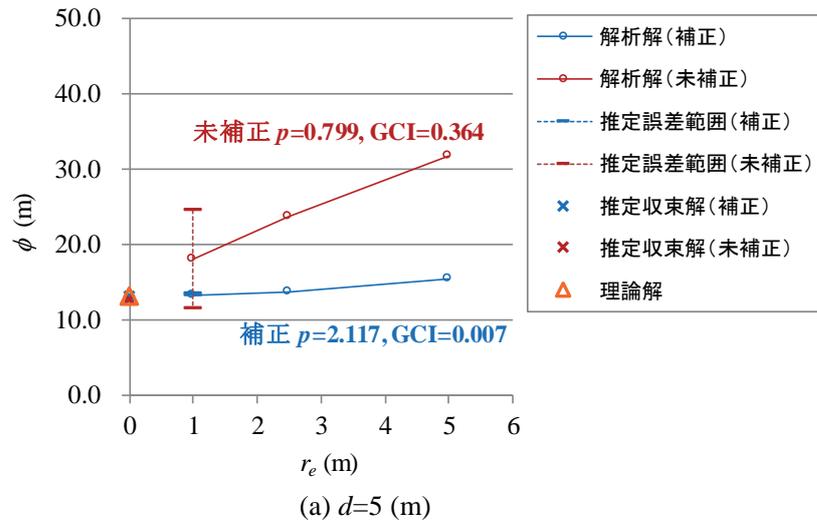
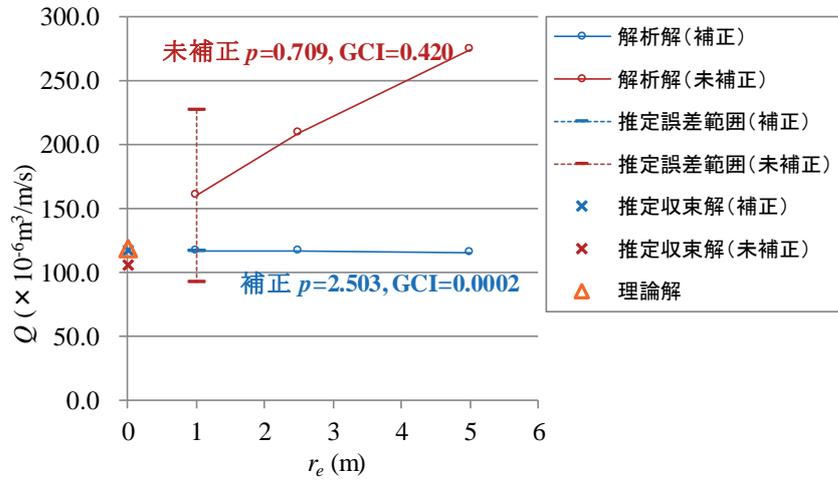
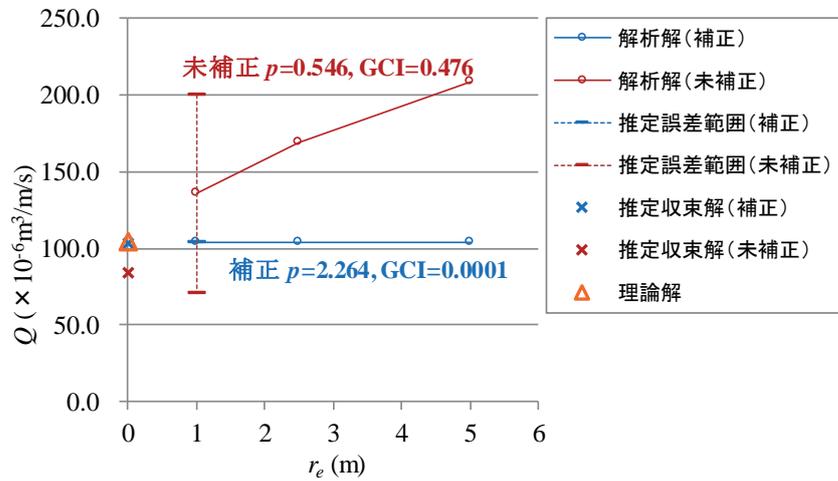


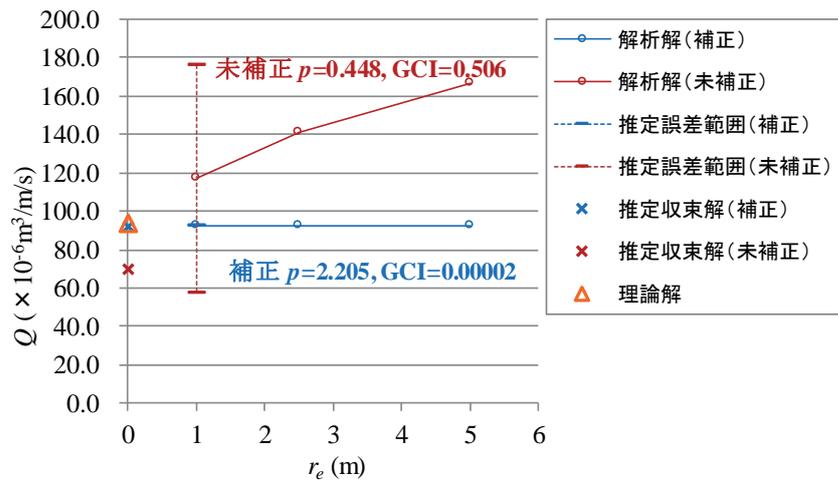
図 4.2-1 収束解および誤差範囲の推定 (単孔問題, 全水頭  $[x=0, y=d+10]$ )



(a)  $d=5$  (m)



(b)  $d=10$  (m)



(c)  $d=20$  (m)

図 4.2-2 収束解および誤差範囲の推定 (単孔問題, 流量)

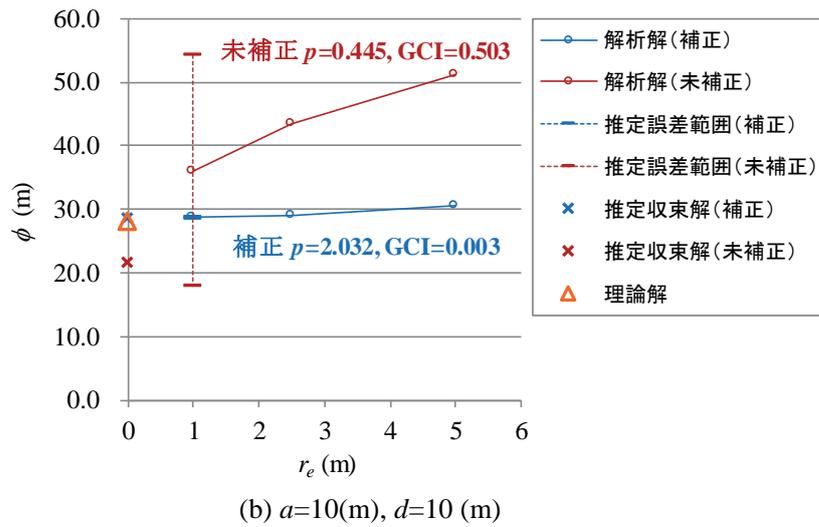
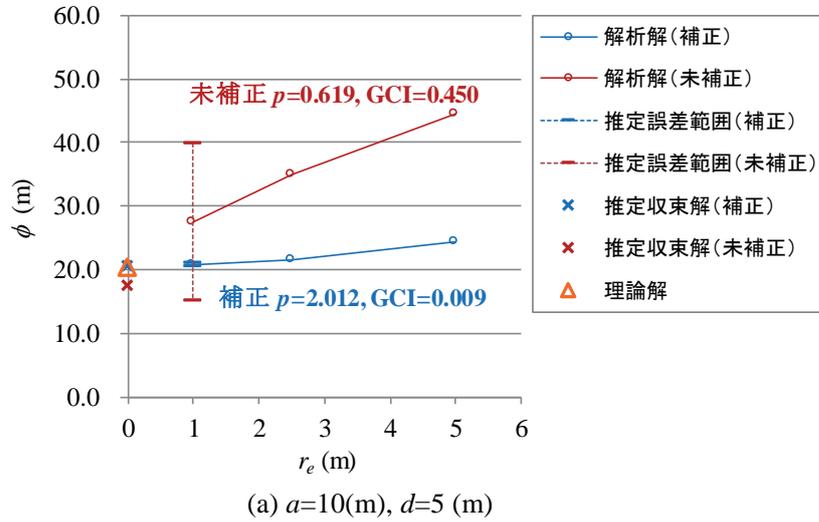


図 4.2-3 収束解および誤差範囲の推定 (二孔問題,  $a=10(\text{m}), d=5(\text{m})$  および  $a=10(\text{m}), d=10(\text{m})$ , 全水頭  $[x=0, y=d+10]$  )

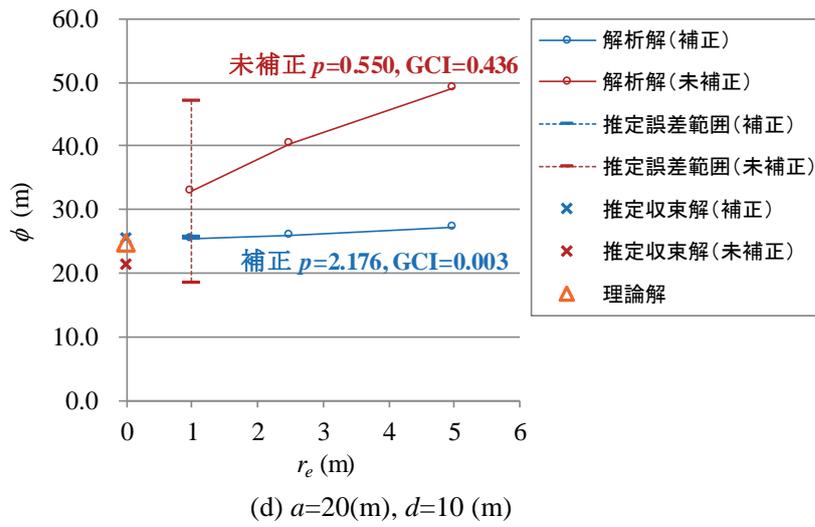
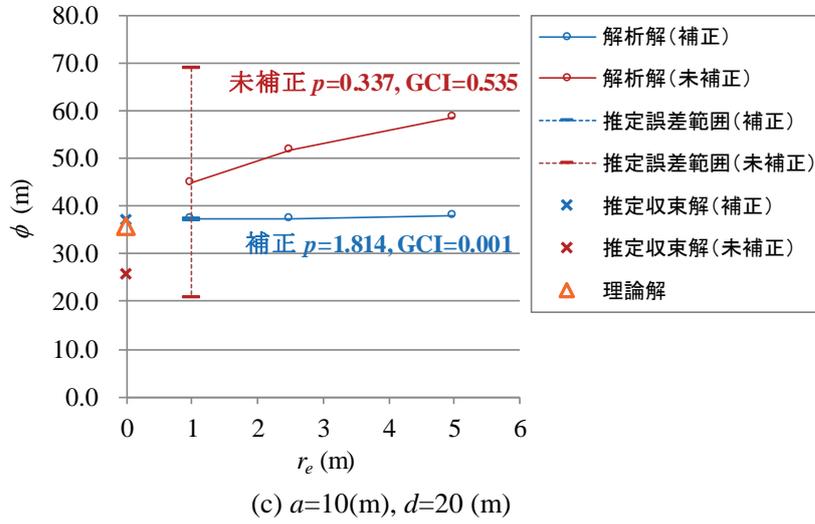


図 4.2-4 収束解および誤差範囲の推定（二孔問題， $a=10(\text{m}), d=20(\text{m})$ および  
 $a=20(\text{m}), d=10(\text{m})$ ，全水頭〔 $x=0, y=d+10$ 〕）

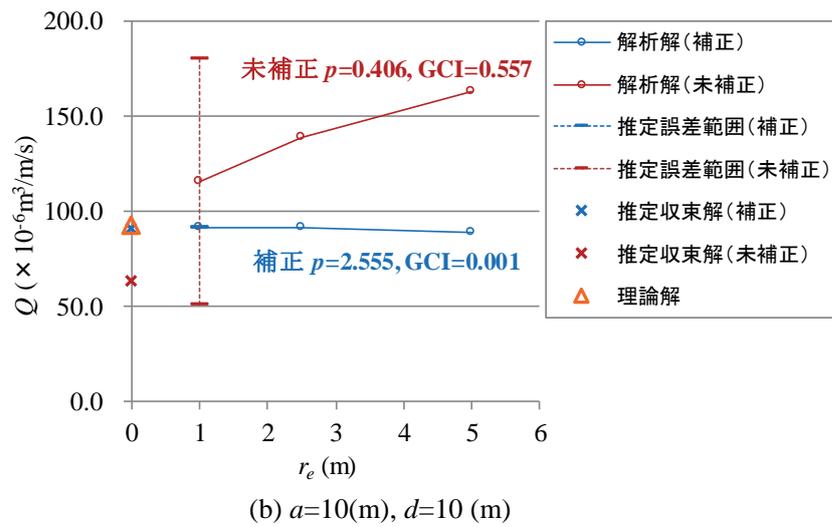
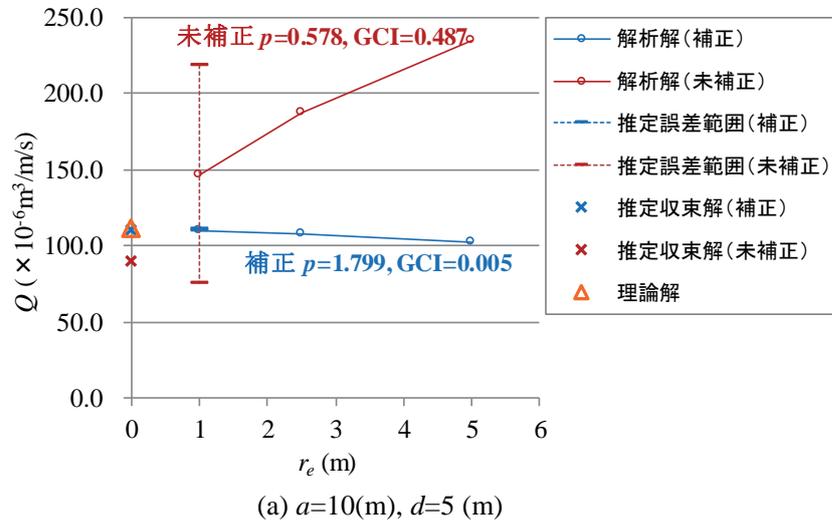


図 4.2-5 収束解および誤差範囲の推定 (二孔問題,  $a=10(\text{m}), d=5(\text{m})$  および  $a=10(\text{m}), d=10(\text{m})$ , 流量)

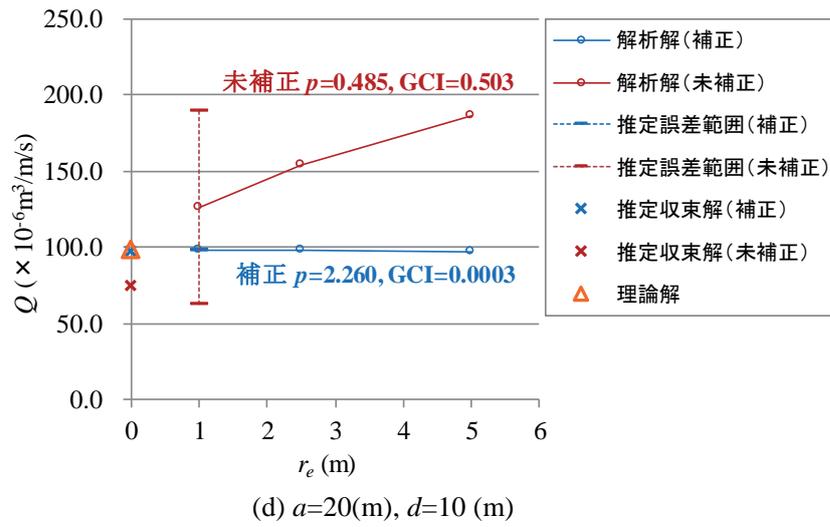
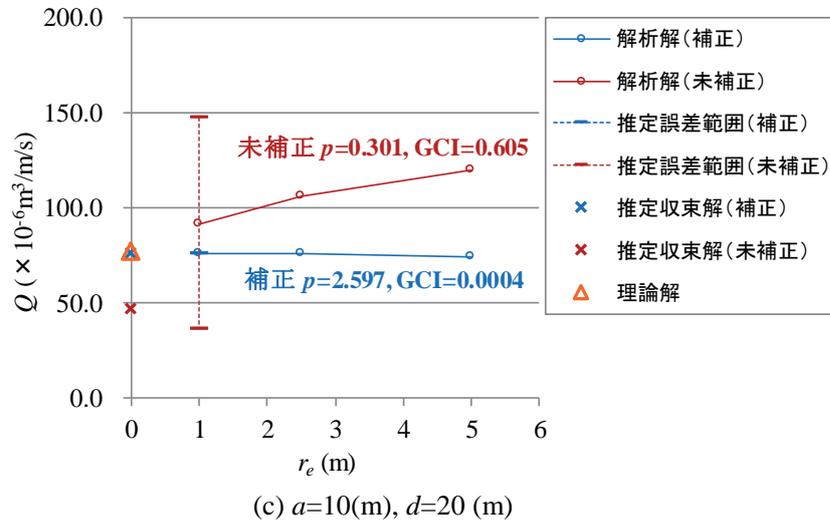


図 4.2-6 収束解および誤差範囲の推定 (二孔問題,  $a=10(\text{m}), d=20(\text{m})$  および  $a=20(\text{m}), d=10(\text{m})$ , 流量)

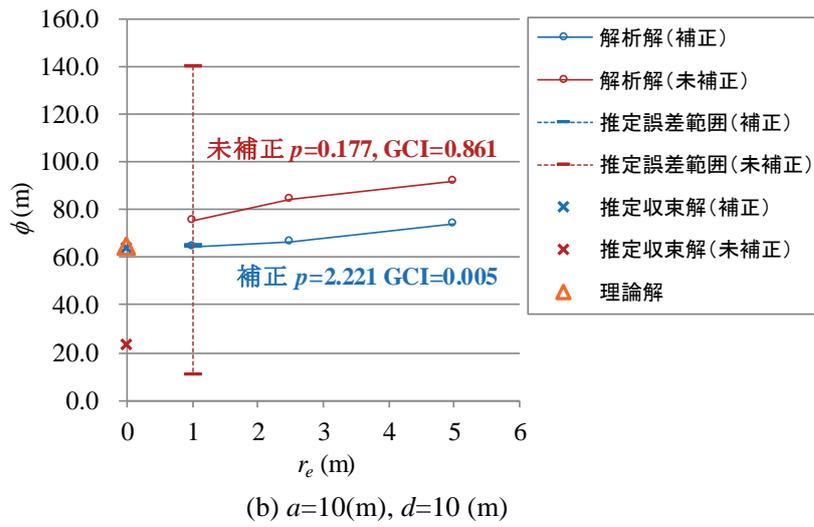
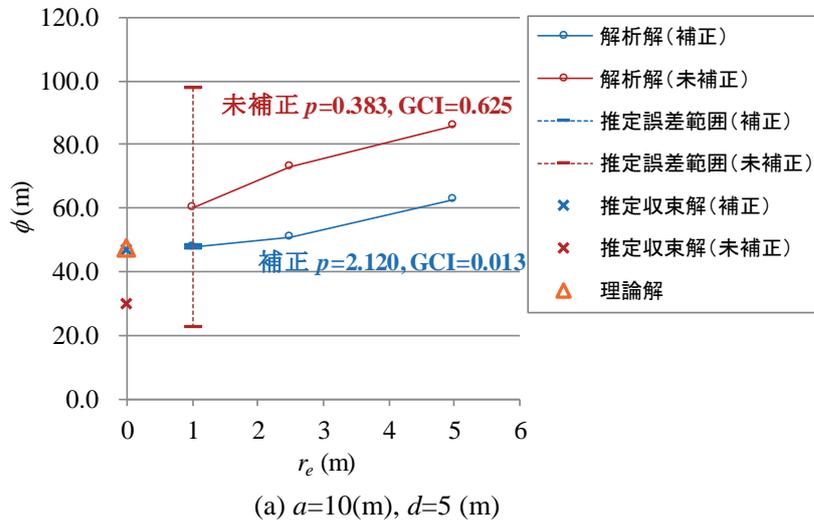


図 4.2-7 収束解および誤差範囲の推定（無限配列孔問題， $a=10(\text{m}), d=5(\text{m})$ および  
 $a=10(\text{m}), d=10(\text{m})$ ，全水頭  $[x=0, y=d+10]$  )

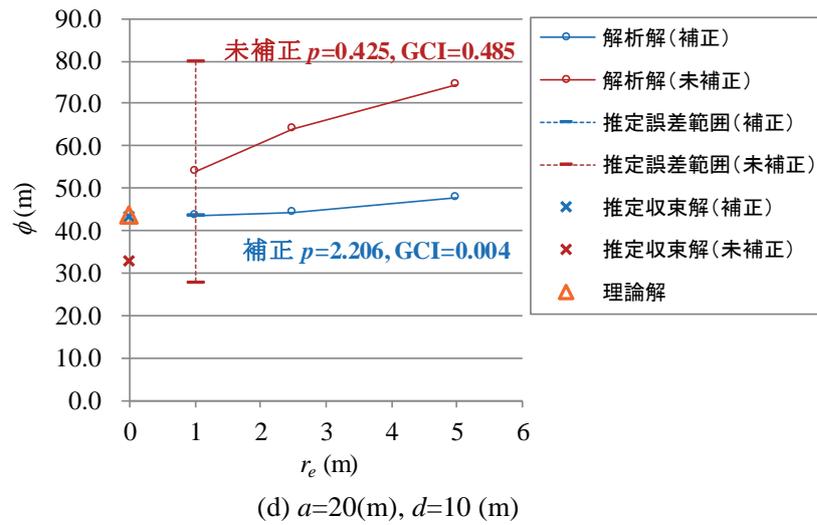
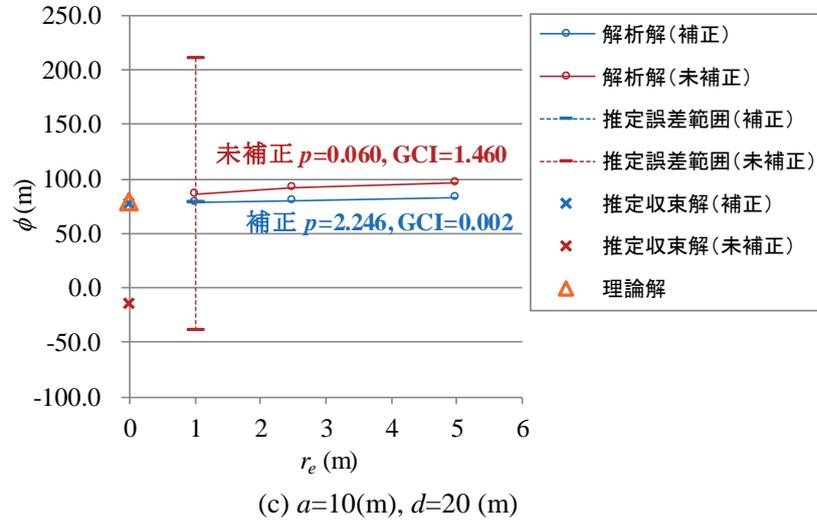


図 4.2-8 収束解および誤差範囲の推定（無限配列孔問題， $a=10(\text{m}), d=20(\text{m})$ および  
 $a=20(\text{m}), d=10(\text{m})$ ，全水頭  $[x=0, y=d+10]$ ）

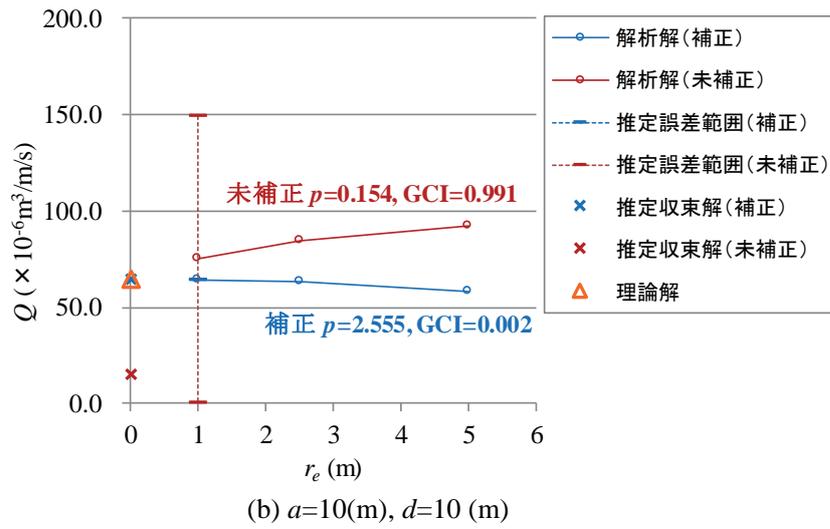
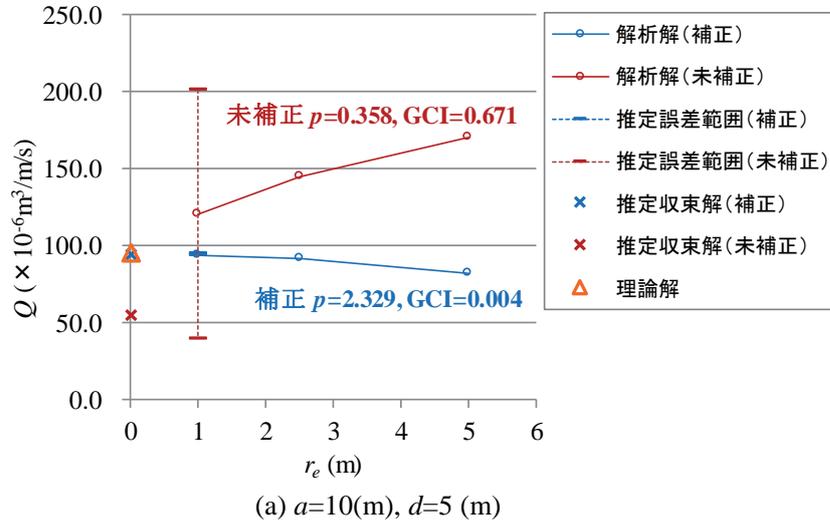


図 4.2-9 収束解および誤差範囲の推定（無限配列孔問題， $a=10(\text{m}), d=5(\text{m})$ および  
 $a=10(\text{m}), d=10(\text{m})$ ，流量）

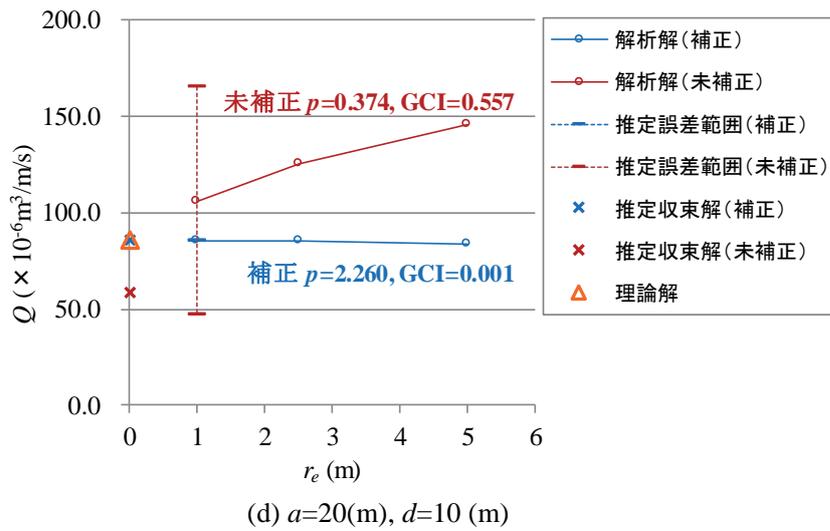
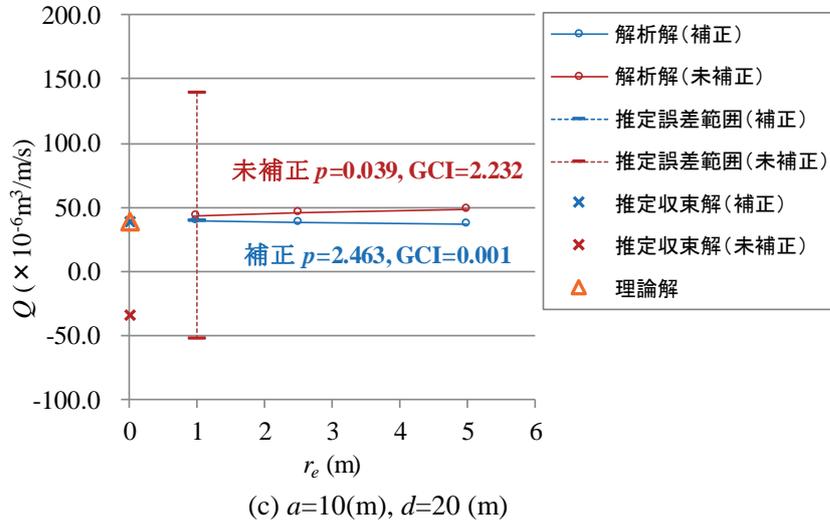


図 4.2-10 収束解および誤差範囲の推定（無限配列孔問題， $a=10(\text{m}), d=20(\text{m})$ および  
 $a=20(\text{m}), d=10(\text{m})$ ，流量）

#### 4.2.2 解検証の試行のまとめ

本節では、実問題に近い線状の定圧境界近傍にある群孔問題を対象とし、提案した補正点源モデルおよび従来方法による未補正の点源モデルについて解検証を行った。要素サイズの異なる三つのメッシュの解から Richardson 補外により収束解を推定し、格子収束指数 (GCI) を用いて誤差範囲を求めた。その際に観測される解の正確度のオーダーに着目し、提案する補正点源モデルと従来の未補正点源モデルの特徴を以下に示す。

- a. 提案する補正点源モデルの解の正確度のオーダーは 1.8 以上であり、推定された収束解は理論解と良い一致を示し、推定誤差範囲はごく限定された幅を示した。
- b. 従来の未補正点源モデルの正確度のオーダーは、良い場合でも 0.8 程度、悪い場合では 0.04 程度となり、GCI による収束解、離散化誤差の推定は適切に行えなかった。
- c. GCI を用いた検証は、メッシュ分割の適切さの判断に加えて、孔を点源により表現するなど構造物のモデル化が適切か否かの検証にも有用性が高い見通しを得た。

実務においても期待する解の精度を得るために、対象とする問題ごとに解検証を実施し、空間に関する離散化の適切さなどを誤差の定量的な評価により行うことが重要であると考えられる。

### 4.3 本章のまとめ

以下に本章の内容をまとめる.

- V&V の観点から解検証について概説した.
- 解検証は, 実問題に近い線状の定圧境界近傍にある群孔問題を対象とし, 要素サイズの異なる三つのメッシュの解から Richardson 補外により収束解を推定し, 格子収束指数 (GCI) を用いて誤差範囲を求めた. その際に観測される解の正確度のオーダーに着目した.
- 想定した要素サイズにおいて, 提案するモデル化の解の正確度のオーダーは 2 に近く, 推定された収束解は理論解と良い一致を示し, 推定誤差範囲はごく限定された幅を示した.
- 従来未補正のモデル化の正確度のオーダーは 0.9 以下, 悪い場合では 0.5 を大きく下回り, 収束解や離散化誤差の推定は適切に行えなかった.
- 離散化誤差の推定の信頼性のために, 解がメッシュサイズの変化に対して漸近的に収束する領域 (asymptotic range) にあることが正確な推定を行う上での前提となることを確認できた.
- 検証の重要性および検証時の留意点について論じた.

## 第 5 章 結論

大規模地下構造物の計画や地下水環境評価などにおける広域の浸透流解析では、非常に小さな径のボーリング孔や井戸などによる注水／揚水のモデル化が重要になる場合がある。浸透流解析は、複雑な地下構造物の形状をより忠実に表現することが可能な有限要素法 (FEM) を用いたシミュレーションが行われることが多い。しかしながら、他の構造物や解析領域の大きさと比較して非常に小さい径の注水孔／揚水孔を解析モデルに取り入れることは、メッシュ分割に多大な労力を要するだけでなく、実務上、非現実的な規模の計算モデルになるため、非常に困難となる。そこで、FEM による大規模浸透流解析モデルにおいて、注水／揚水孔を取り扱う際には、孔はその体積を無視して、節点における点源の連なりとして表現することが多いが、点源は要素サイズに依存する相当半径 (Virtual radius) を有する孔として近似されることになる。相当半径は点源の属する要素サイズに依存するので、孔の実半径とは必ずしも一致しないため、その乖離が大きいほど、点源の流量や点源周辺の水頭分布の解析精度が低下する。

本研究ではこのような広域の浸透流解析における注水／揚水孔のモデル化について、点源を用いた簡便かつ効果的なモデル化を提案した。また、工学シミュレーションの V&V の観点から、提案するモデル化に関するコード検証と解検証を実施し、モデル性能を明示したことに加えて、検証の重要性と留意点を示した。

以下に得られた成果を章別に取りまとめる。

第 1 章では、広域を対象とした FEM 浸透流解析における注水／揚水孔のモデル化で求められる重要な技術課題について幾つかの例を挙げて示し、これらの問題に対するモデル化の手法が必ずしも確立されていないことを背景として示した。そして、本研究の目的を、FEM による広域の浸透流解析における孔や井戸のモデル化について、実務上合理的な解析モデルの規模を保持しつつ、解析精度を改善させることとして明示した。そこで、本研究の内容を、問題解決に有効となる点源を用いた新しいモデル化の開発として明確に示した。一方で、工学シミュレーションにおける品質確保と信頼性確立の現状を背景として、V&V

(Verification and Validation) に関する既往研究をまとめ、本研究で提案する点源を用いたモデル化に対して、米国機械学会 (ASME) に代表されるモデル V&V に基づくコード検証および解検証を行うことを研究内容として明示し、本研究の位置づけを明確にした。

第 2 章では、本研究で提案する点源を用いた注水／揚水孔のモデル化を示し、第 1 章で示した本研究の目的を達成するための具体的な方法について論じた。有限要素法による浸透流解析において、注水／揚水孔を解析モデルで取り扱う際に直面する要素サイズに係わる問題を提示し、従来のモデル化について、孔を点源により解析モデルで表現する際の問題点を明らかにした。その上で、本研究で提案する点源を用いた注水／揚水孔のモデル化の詳細について述べた。提案するモデル化は、点源を含む要素の透水係数を補正することにより、点源の相当半径と孔の実半径を等価にするもので、要素サイズの影響を低減して解の精度を改善するものである。二次元放射状流問題および三次元球状流問題の理論式から導出した補正式について、対象とする問題と要素の種類ごとに詳説した。提案するモデル化の利点について、類似の研究例との比較を行い、本研究の独自性を明確にした。

第 3 章では、本研究が提案するモデル化に対して、コード検証を行った。V&V の検証における最初のプロセスであるコード検証について概説し、提案するモデル化の精度の確認と適用性、およびモデル性能に関する検証結果を示した。

提案するモデル化の有効性や有用性について、いくつかの数値実験により明示した。また、従来のモデル化では、解の精度が点源周りの要素サイズの大きさに強く依存し、著しい解の劣化が生じる結果も示し、結果の対比により、提案するモデル化の優位性も明示した。具体的には、補正式を導出した二次元単一孔問題および三次元球状流問題を対象とした数値実験を実施し、孔の流量や全水頭分布に関する理論解との比較により、提案するモデル化は大幅な精度改善を可能とすることを確認した。また、二次元の群孔問題や、地盤の透水係数が不均質とした問題についても数値実験を行い、理論解や極小メッシュを用いた参照解との比較により提案するモデル化の適用性について評価を行った。さらに、より実務に近い問題を想定し、地盤の透水性を不均質とした状態で、実際の孔近傍の流れを二

次元放射状流と先端部の三次元球状流の組み合わせにより表現し、二次元の補正式と三次元の補正式を併用した数値実験を行い、適用性を確認した。これらの数値実験により、提案するモデル化の実問題への適用への見通しを得た。

また、モデル性能の検証については、単一孔問題における解の収束性と精度に関する数値実験における観測結果により、提案するモデル化を含む、四つのモデル化に関するモデル性能の検証結果を示した。本研究で提案するモデル化と、孔の実径をメッシュ分割したモデル化、および、点源の相当半径を孔の実半径と等価にする要素サイズを設定したモデル化については、数値実験から観測された収束比が理論的に期待される収束比と概ね一致したことから、モデル性能を確認できた。また、提案するモデル化の解析精度は、同じ要素サイズであれば、最も高い精度の結果が得られることを確認した。一方、点源を用いた従来のモデル化の数値実験結果からは明確な収束比が観測できなかったことから、モデル性能に問題があることを示し、点源の相当半径が実半径と等しくなるようなメッシュ分割または適切な補正を行う必要があることを明らかにした。

第4章では、本研究で提案するモデル化に関する解検証を試行した。まずは、V&Vにおけるコード検証の次のプロセスである解検証について概説した。次に、より一般的な問題の例である、直線状の定圧境界近傍に配置された群孔問題を対象として、提案するモデル化に関する解検証を試行した。Richardson 補外法と格子収束指数 GCI を用いて、離散化誤差および収束解を推定し、解の正確度のオーダーに着目した評価により、提案するモデル化および従来のモデル化との比較を行い、その結果から、解検証の重要性と、解検証を実施する際の留意点を顕在化させた。

以上が本研究の結論をまとめたものである。

本研究では、広域の浸透流解析における非常に径の小さな注水／揚水孔のモデル化に関する解析メッシュ作成時の省力化および解析精度向上といった技術的課題に対して、次元放射状流および三次元球状流の理論解から導出した補正式を用いる新しいモデル化を提案した。提案するモデル化に対する有効性や有用性の検討、さらには V&V の観点からの

検証によるモデル性能や離散化誤差の定量化に関する評価を行った。提案したモデル化は効果的であるだけでなく、非常に簡便であり、既存の解析コードへの実装が容易なことが特徴であるといえる。また、点源が属する要素の透水係数を補正するだけなので、節点の増加等が無く、計算処理に要する時間もほとんど増加しない。ダルシー流速の算出等の際に補正前の地盤の透水係数を用いることに注意すれば、入力データを変更するだけで、既存コードをそのまま用いた解析も可能である。解析モデルを実務上、現実的な規模に抑えるために孔径の小さな注水／揚水孔等を点源としてモデル化する際の解析精度の改善方法として有望な方法であると考えられる。

本研究の動機は冒頭で述べた複雑かつ大規模な地下構造物周辺の注水／揚水孔を点源としてモデル化する際の解析精度の改善である。提案するモデル化で用いる補正式は、地盤の透水性を均質とした条件下での単一の孔あるいは単一の点に関する理論解から導出したものであるが、群孔問題や線状定圧境界が存在する問題、また、不均質な地盤条件の問題への適用性についても、一定の見通しを得た。注水／揚水孔のモデル化の精度向上における最終的な目標は、冒頭で述べたような大規模な地下構造物が存在する複雑な地下水流動場への適用であり、このような地下水流動場への適用を視野に入れると、以下に挙げる事項の検証が課題であると考えられる。

- ・任意性の高い要素形状への対応
- ・飽和・不飽和问题への適用
- ・非定常問題への適用
- ・地盤透水性の異方性や岩盤中の水みち問題への対応

今後は、これらを検証することにより提案するモデル化の適用範囲を明確にして、より汎用性の高いモデル化へと発展させることを目指す。

## 参 考 文 献

- 1) 土木学会 岩盤力学委員会：大規模地下空洞の建設・維持管理事例（H25 年度集約版），CD-ROM，2014.
- 2) 藤井健知，小渕考晃，西琢郎，金戸辰彦，前島俊雄：倉敷基地 LPG 岩盤貯槽における水封カーテンの構築と気密試験時の地下水挙動評価について，第 42 回岩盤力学に関するシンポジウム講演集，No.24，pp.131-136，2014.
- 3) 張傳聖，池谷貞右，下茂道人，大久保秀一，前島俊雄：波方基地プロパン貯槽 岩盤貯槽における水封カーテンの構築と気密試験時の地下水挙動評価について，第 42 回岩盤力学に関するシンポジウム講演集，No.40，pp.225-230，2014.
- 4) 池谷貞右，張傳聖，鈴木健一郎，宮崎裕光，大久保秀一，前島俊雄：波方基地 ブタン／プロパン兼用貯槽 岩盤貯槽における水封カーテンの構築と気密試験時の地下水挙動評価について，第 42 回岩盤力学に関するシンポジウム講演集，No.54，pp.302-307，2014.
- 5) 核燃料サイクル開発機構：わが国における高レベル放射性廃棄物地層処分の技術的信頼性－地層処分研究開発第 2 次取りまとめ－ 総論レポート，JNC TN1400-99-020，平成 11 年 11 月.
- 6) 核燃料サイクル開発機構：わが国における高レベル放射性廃棄物地層処分の技術的信頼性－地層処分研究開発第 2 次取りまとめ－ 分冊 2 地層処分の工学技術，JNC TN1400-99-022，平成 11 年 11 月.
- 7) 山本真哉，櫻井英行，尾上博則，増本清：地下水流動解析の逆問題における観測位置選定に関する検討，日本地下水学会 2016 年秋季講演会予稿，No.25，pp. 90-93，2016.
- 8) 河野伊一郎：地下水工学，鹿島出版会，1989.
- 9) Kono, I.: The equivalent radius of a source in numerical models of groundwater flow, *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, No. 218, pp. 103-107, 1973.
- 10) 白石知成，佐藤春香：井戸理論解との比較による FEM 解析モデルのメッシュ分割影響に関する検討，土木学会第 64 回年次学術講演会講演概要集，III-297，pp.593-594，2009.
- 11) 山田俊子，櫻井英行，鈴木誠：有限要素法を用いた浸透流解析における注水・揚水孔の実用的な簡易モデル，土木学会論文集 C(地圏工学)，Vol.71，No.4，pp.407-417，2015.
- 12) 山田俊子，白石知成，櫻井英行：群井のモデル化における点源の等価半径補正方法の検討，日本地下水学会 2013 年秋季講演会講演予稿，No.26，pp.106-111，2013.
- 13) <http://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters/sleipner.html>

- 
- 14) <http://www.nafems.org/>
  - 15) The American Society for Mechanical Engineers: *Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics*, ASME V&V 10-2006, 2006.
  - 16) 白鳥正樹, 越塚誠一, 吉田有一郎, 中村均, 堀田亮年, 高野直樹: 工学シミュレーションの品質保証と V&V, 丸善, 2008.
  - 17) 日本計算工学会: 日本計算工学会標準「工学シミュレーションの品質マネジメント」第 2 版 (JSCES S-HQC001:2014) 日本計算工学会, 2014.
  - 18) 日本計算工学会: 日本計算工学会標準「工学シミュレーションの標準手順」第 2 版 (JSCES S-HQC002:2015), 日本計算工学会, 2015.
  - 19) 日本計算工学会: 日本計算工学会標準「学会標準 (HQC001&002) 事例集」(JSCES-HQC003:2015), 日本計算工学会, 2015.
  - 20) American Institute of Aeronautics and Astronautics: *Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations*, 1998.
  - 21) The American Society for Mechanical Engineers: *Illustration of the Concepts of Verification and Validation in Computational Solid Mechanics*, ASME V&V 10.1-2012, 2012.
  - 22) National Aeronautics and Space Administration: *STANDARD FOR MODELS AND SIMULATIONS*, NASA TECHNICAL STANDARD NASA-STD-7009A, 2016.
  - 23) 日本原子力学会: 日本原子力学会標準「シミュレーションの信頼性確保に関するガイドライン: 2015」(AESJ-SC-A008: 2015), 2016.
  - 24) 櫻井英行・桐山貴俊・渦岡良介・中井健太郎・森口周二: 土木工学のシミュレーションにおける V&V のニーズと課題, 第 71 回年次学術講演会講演概要集, CS8-022, pp.43~44, 2016.
  - 25) 櫻井英行: 土木の CAE と V&V を考える, 計算工学, Vol.21, No.3, pp.3468(18)~3471(21), 2016.
  - 26) 地下水流動解析コード検証事例作成のための調査研究グループ・登坂博行・白石知成: 地下水流動解析コード検証事例作成のための検討 (経過報告), 2017 年春季講演会講演予稿, 18, pp.58~63.
  - 27) Peaceman, D. W.: Interpretation of wellblock pressures in numerical reservoir simulation, *Society of Petroleum Engineers Journal*, Vol. 18, pp. 183-194, 1978.
  - 28) Peaceman, D. W.: Interpretation of wellblock pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability, *Society of Petroleum Engineers Journal*, Vol. 23, pp. 531-543, 1983.

- 
- 29) Peaceman, D. W.: Interpretation of wellblock pressures in numerical reservoir simulation: Part 3 - Off center and multiple wells within a wellblock, *Society of Petroleum Engineers Reservoir Engineering*, Vol. 5, pp. 227-232, 1990.
  - 30) Peaceman, D. W.: Representation of a horizontal well in numerical reservoir simulation, *Society of Petroleum Engineers Advanced Technology Series*, Vol. 1, No. 1, pp. 7-16, 1993.
  - 31) 登坂博行, 小島圭二, 三木章夫, 千野剛司: 地表流と地下水流を結合した 3 次元陸水シミュレーション手法の開発, *地下水学会誌*, Vol.38, pp.253-267, 1996.
  - 32) 山石毅, 小林仁, 谷藤吉郎, 岡本明夫, 登坂博行, 小島圭二: 地下石油備蓄基地建設に伴う水文・水理挙動の数値シミュレーション, *地下水学会誌*, Vol.40, pp.167-183, 1998.
  - 33) Ding, Y.: A generalized 3D well model for reservoir simulation, *Society of Petroleum Engineers Journal*, Vol. 1, pp. 437-450, 1996.
  - 34) Wolfsteiner, C., Durlofsky, L. J. and Aziz, K.: Calculation of well index for nonconventional wells on arbitrary grids, *Computational Geosciences*, Vol. 7, pp. 61-82, 2003.
  - 35) 上村佳司, 榊利博, 田中良弘: 浸透流解析における井戸のモデル化に関する一考察, 第 28 回土質工学研究発表会講演概要集, E-7, No.841, pp.2245-2246, 1993.
  - 36) 榊利博, 上村佳司, 田中良弘: 平面 2 次元浸透流解析における井戸のモデル化に関する一考察, 第 28 回土質工学研究発表会講演概要集, E-7, No.842, pp.2247-2248, 1993.
  - 37) 上村佳司, 榊利博, 田中良弘: 3 次元 FEM 浸透流解析における部分貫入井のモデル化に関する一考察, 土木学会第 49 回年次学術講演会講演概要集, III-84, pp.162-163, 1994.
  - 38) Chen, Z. and Zhang, Y.: Well flow models for various numerical methods, *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, Vol. 6, No. 3, pp. 375-388, 2009.
  - 39) Roache, J. P.: *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*, Hermosa Publishers, 1998.
  - 40) Oberkampf, W. L. and Roy, C. J.: *Verification and Validation in Scientific Computing*, Cambridge University Press, 2010.
  - 41) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L.: *The Finite Element Method*, 1st ed., Vo.1, Butterworth-Heinemann, 2000.
  - 42) Babuska, I. and Szabo, B.: On the Rates of Convergence of the Finite Element Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, pp. 323-341, 1982.
  - 43) 山田貴博: 高性能有限要素法, 丸善株式会社, 2007.

- 
- 44) 日本計算工学会編：有限要素法による流れのシミュレーション，丸善出版株式会社，2017.
- 45) 山田貴博：高次連続性を有する近似基底を用いた創成解の構成，計算工学講演会論文集 19, No. C-7-7, CD-ROM, 2014.
- 46) Roy, C, J.: Review of code and solution verification procedures for computational simulation, *Journal of Computational Physics*, No. 205(1), 2005.
- 47) Muskat, M.: *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*, 1st ed., McGraw-Hill, 1937.

## 発 表 論 文

### 国内学術誌

山田俊子, 櫻井英行, 鈴木誠 : 有限要素法を用いた浸透流解析における注水・揚水孔の実用的な簡易モデル, 土木学会論文集 C(地圏工学), Vol.71, No.4, pp.407-417, 2015.

山田俊子, 櫻井英行, 鈴木誠 : 注水／揚水孔の簡易有限要素モデルのコード検証, 土木学会論文集 C(地圏工学), Vol.73, No.4, pp.450-459, 2017.

山田俊子, 櫻井英行, 鈴木誠 : 注水／揚水孔の簡易有限要素モデルの解検証, 土木学会論文集 C(地圏工学), 投稿中.

### 国際会議口頭発表

Toshiko Yamada, Takuro Nishi, Tomonari Shiraiishi, Hideyuki Sakurai : A Simple but Effective Well Model for Groundwater Flow Finite Element Analysis, Computational Engineering and Science for Safety and Environmental Problems (COMPSAFE2014), 7G-3, pp.508-509, 2014.

## 国内学会講演会口頭発表

山田俊子：単線源のモデル化における等価半径補正方法の提案，日本地下水学会 2012 年秋季講演会講演予稿，No.43，pp.190-193，2012.

山田俊子，白石知成，櫻井英行：群井のモデル化における点源の等価半径補正方法の検討，日本地下水学会 2013 年秋季講演会講演予稿，No.26，pp.106-111，2013.

山田俊子，櫻井英行，鈴木誠：球状流のモデル化における点源の等価半径補正方法，日本地下水学会 2014 年秋季講演会講演予稿，No.36，pp.140-143，2014.

山田俊子，櫻井英行，鈴木誠：点源による注水孔の簡易モデルにおける要素ライブラリの拡充，土木学会第 70 回年次学術講演会講演概要集，III-284，pp.567-568，2015.

山田俊子，櫻井英行，山本真哉，鈴木誠：注水・揚水孔周辺流れ場の有限要素モデルに関するコード検証，日本地下水学会 2016 年秋季講演会講演予稿，No.28，pp.102-105，2016.

櫻井英行，山田俊子，鈴木誠：直線供給源近傍における注水・揚水孔の簡易モデルの適用性，日本地下水学会 2016 年秋季講演会講演予稿，No.29，pp.106-109，2016.

櫻井英行，山田俊子，鈴木誠：拡散方程式の有限要素モデルに対するコード検証，日本計算工学会第 22 回計算工学講演会論文集，Vol.22，C-10-2，2017.

## 謝 辞

本研究を遂行するにあたり、たくさんの方々からご指導、ご鞭撻、ご協力を賜りました。

まず、本論文をまとめるにあたって、機会を与えていただき、研究全般にわたり懇切丁寧なるご指導、数々のご配慮を賜りました千葉工業大学大学院工学研究科工学専攻の鈴木誠教授に心から感謝の意を表し、厚く御礼申し上げます。

同大学院工学研究科工学専攻の田村和夫教授には、研究を進める中で折に触れてご激励をいただき、また、本論文の執筆に関して数々のご指導、ご意見を賜りました。同大学院工学研究科工学専攻の上田宏教授には、本論文をまとめるにあたり数々のご指導と広い視野からの貴重なご助言を賜り、あたたかいご激励を頂戴いたしました。同学院工学研究科工学専攻の内海秀幸教授には、大学院入学時より社会人博士課程の学生生活を送るためのご配慮を賜り、本論文へのご指導をいただきました。ここに謹んで御礼申し上げます。

中央大学理工学部学部長の樫山和男教授には、本研究へのご理解を賜り、本論文の全般に渡るご指導、ご配慮をいただきました。特に、数値解析に関する勉強会への参加機会を与えて頂き、また、多くのご教示、貴重なご意見を頂きました。深く感謝いたします。

岡山大学大学院環境生命科学研究科の西垣誠名誉教授には、本研究の当初からご理解を賜り、浸透流解析において解決すべき課題に関するご意見、ならびに発表論文への懇切丁寧なご指導とご激励のお言葉を頂戴いたしました。謹んで深謝し御礼を申し上げます。

横浜国立大学大学院環境情報研究院の山田貴博教授には、本研究の遂行にあたり、工学シミュレーションの検証に関する貴重なご教示、ご指導ならびにご配慮を賜りました。心より御礼申し上げます。

本論文をまとめるにあたり、共同研究者として清水建設株式会社技術研究所の櫻井英行博士には、終始一貫した本研究へのご理解ならびに数々のご教示、ご助言、惜しみないご協力を頂戴いたしました。櫻井博士との有益な議論により、本研究を工学シミュレーションの検証まで展開させることができました。ここに改めて感謝申し上げます。

清水建設株式会社技術研究所の西塚郎博士には、著者が本研究を始める機会をつくって頂き、浸透流解析の実務において解決すべき課題に関するご意見、研究遂行のための多くのご指導、ご激励を頂きました。謹んで御礼申し上げます。同技術研究所の白石知成博士には浸透流解析の実務と研究に関する数々のご指導、多くの議論を通じて貴重なご教示をいただきました。記して謝意を表します。

清水建設株式会社土木技術本部の執行役員・本部長 河田孝志氏、副本部長 樋口義弘氏、部長 戸栗智仁氏には、著者の上司として数々のご配慮を賜り、いつもあたたかく見守っていただきました。深謝し御礼を申し上げます。

元清水建設株式会社土木技術本部 長谷川誠博士ならびに元清水建設株式会社技術研究

所 百田博宣博士には、本研究の基礎となる浸透流解析全般について、実務を通じた懇切丁寧なご指導をいただきました。お二人のご指導が無ければ著者の研究はありませんでした。記して感謝申し上げます。

元清水建設株式会社土木技術本部の木内勉博士には、大学の先輩として学位取得を勧めて下さり、数々のご助言をいただきました。厚く御礼申し上げます。

清水建設株式会社技術研究所の上席研究員 若原敏裕博士，副所長 奥野哲夫博士には、研究に対する基本的な姿勢や進め方についてのご指導，ご助言を賜りました。謹んで御礼申し上げます。

東京大学 小島圭二名誉教授，電力中央研究所名誉研究顧問 駒田広也博士，元高圧ガス保安協会の須知修氏には、著者が本研究の起点となった岩盤石油ガス備蓄基地建設プロジェクトに携わりはじめた当初から、本論文をまとめるまでの長きに渡り、折に触れてご激励を賜り、始終一貫してあたたく見守っていただきました。謹んで感謝申し上げます。

最後に、本研究の完遂は、反町公子博士の激励無しには成しえませんでした。心より感謝申し上げます。